

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

В. П. Ильин В. В. Карпов А. М. Масленников

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

Под общей редакцией
доктора технических наук,
профессора В. П. ИЛЬИНА

ББК ~~38.112.2~~

И 46

УДК 624.04:519.6(035.5)

Рецензент доктор технических наук, профессор

Н. Н. Леонтьев

Редактор издательства кандидат технических наук

В. Г. Самарина

И $\frac{3302000000-090}{М304(03)-90}$ 91—90

ISBN 5-339-00366-3

© Коллектив авторов, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
1. Приближение функций. Методы приближенного дифференцирования и интегрирования	11
1.1. Приближение функций. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона	11
1.1.1. Общие понятия о приближении функций. Аппроксимирующие функции	11
1.1.2. Интерполяционный полином Лагранжа	12
1.1.3. Интерполяционный полином Ньютона	14
1.2. Сплайн-интерполяция	15
1.2.1. Полиномиальный интерполяционный сплайн	15
1.2.2. Применение сплайнов при решении задач методом конечных элементов	16
1.3. Приближенное дифференцирование и интегрирование функций	19
1.3.1. Приближенное дифференцирование функций	19
1.3.2. Приближенное интегрирование функций с помощью формулы Симпсона	19
1.4. Сглаживание экспериментальных зависимостей. Оценка погрешности решения	20
1.4.1. Метод наименьших квадратов	20
1.4.2. Погрешности численного решения задач строительной механики	21
2. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений	24
2.1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	24
2.1.1. Матричная форма системы линейных уравнений	24
2.1.2. Метод Гаусса	25
2.1.3. Вычисление определителей и обращение матриц	30
2.2. Решение систем линейных уравнений методом прогонки	31
2.2.1. Метод прогонки для систем уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов	31
2.2.2. Метод прогонки для систем уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов	34
2.3. Обусловленность матриц коэффициентов систем линейных уравнений	35
2.3.1. Характеристика обусловленности матриц	35
2.3.2. Способы улучшения обусловленности матриц	38
2.4. Методы вычисления собственных значений и собственных векторов матриц	41

2.4.1. Собственные значения и собственные векторы матриц	41
2.4.2. Нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы	43
2.4.3. Определение наибольшего и наименьшего собственных значений симметричной матрицы	46

2.5. Методы решения нелинейных алгебраических, трансцендентных уравнений и их систем	47
--	----

2.5.1. Метод простой итерации	47
2.5.2. Метод Ньютона — Рафсона (метод касательных)	48
2.5.3. Применение метода простой итерации к решению систем нелинейных уравнений	49
2.5.4. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона	51
2.5.5. Решение систем нелинейных уравнений методом наискорейшего спуска	53

3. Матричные методы решения задач строительной механики стержневых систем	57
--	-----------

3.1. Метод сил	57
----------------	----

3.1.1. Применение метода сил к расчету плоских стержневых систем	57
3.1.2. Применение метода сил к расчету пространственных стержневых систем	62

3.2. Метод перемещений	65
------------------------	----

3.2.1. Основы метода перемещений	65
3.2.2. Матричный вариант метода перемещений	66

3.3. Динамический расчет стержневых систем	69
--	----

3.3.1. Определение частот и форм свободных колебаний	69
3.3.2. Расчет на вибрационную нагрузку	72

4. Методы решения начальных и краевых одномерных задач строительной механики	75
---	-----------

4.1. Методы решения начальных задач	75
-------------------------------------	----

4.1.1. Метод Эйлера	75
4.1.2. Метод Рунге—Кутты	76
4.1.3. Применение метода Рунге — Кутты для приближенного решения систем дифференциальных уравнений	77
4.1.4. Метод последовательных приближений	79

4.2. Сведение одномерной краевой задачи к начальной	81
---	----

4.2.1. Метод начальных параметров	81
4.2.2. Метод дополнительных функций	83

4.3. Применение метода Галеркина для решения одномерных краевых задач	85
---	----

4.3.1. Решение краевых задач	85
4.3.2. Решение задач на собственные значения	87

4.4. Применение метода конечных разностей к решению одномерных краевых задач	88
--	----

4.4.1. Решение краевых задач	88
4.4.2. Решение задач на собственные значения	92

4.5. Методы решения жестких систем уравнений	93
--	----

4.5.1. Жесткие системы уравнений в задачах строительной механики	93
4.5.2. Применение неявной схемы метода Рунге — Кутты для решения жестких систем уравнений	94
4.6. Метод решения дифференциальных уравнений, содержащих особенности в виде обобщенных функций Хевисайда и их производных	96
4.6.1. Основные положения метода	96
4.6.2. Решение дифференциальных уравнений, содержащих производные от обобщенной дельта-функции	97
5. Методы решения многомерных линейных задач строительной механики	100
5.1. Метод сеток для решения уравнений в частных производных	100
5.1.1. Основы построения разностных схем	100
5.1.2. Разностная схема решения задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго и четвертого порядков	102
5.1.3. Метод переменных направлений (экономичная разностная схема)	106
5.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)	108
5.2.1. Решение однородных дифференциальных уравнений в частных производных	108
5.2.2. Решение краевой задачи в одноарных тригонометрических рядах	115
5.2.3. Решение краевой задачи в двойных тригонометрических рядах	117
5.3. Методы минимизации невязки	121
5.3.1. Общие положения метода	121
5.3.2. Метод коллокаций	121
5.3.3. Интегральный метод наименьших квадратов	123
5.3.4. Метод Бубнова—Галеркина	124
5.3.5. Метод наилучших произведений	125
5.4. Методы сведения многомерных краевых задач к одномерным	126
5.4.1. Методы прямых	126
5.4.2. Метод Власова—Канторовича	127
6. Метод конечных элементов	130
6.1. Основные положения МКЭ	130
6.1.1. Дискретизация конструкций с помощью конечных элементов	130
6.1.2. Основное отличие МКЭ от метода перемещений	132
6.1.3. Формирование матрицы жесткости конечного элемента на основе принципа возможных перемещений	135
6.1.4. Подбор функции перемещений конечного элемента	137
6.2. Расчет конструкций с применением МКЭ	139
6.2.1. Последовательность расчета	139
6.2.2. Расчет плоских стержневых систем	143
6.2.3. Плоская задача теории упругости	147
6.3. Применение МКЭ к расчету тонких плит и оболочек	151
6.3.1. Расчет тонких прямоугольных плит	151
6.3.2. Расчет скошенных плит	153
6.3.3. Расчет ребристых плит	157
6.3.4. Понятие о расчете оболочек методом конечных элементов	159

6.4. Применение МКЭ к решению задач динамики и устойчивости строительных конструкций	161
6.4.1. Решение задач динамики стержневых систем	161
6.4.2. Решение задач устойчивости стержневых систем	167
6.4.3. Определение частот свободных колебаний прямоугольных и скошенных плит	172
6.5. Метод суперэлементов	175
6.5.1. Основы метода суперэлементов	175
6.5.2. Построение матрицы жесткости и матрицы узловых нагрузок для суперэлемента	176
6.5.3. Варианты общей схемы конденсации неизвестных в граничных узлах суперэлемента	177
7. Вариационные методы решения задач строительной механики	181
7.1. Элементы вариационного исчисления	181
7.1.1. Функционал и его вариация	181
7.1.2. Дифференциальные уравнения Эйлера и Остроградского	183
7.2. Вариационные уравнения строительной механики	185
7.2.1. Полная энергия деформации упругой системы	185
7.2.2. Уравнения равновесия упругого тела	186
7.3. Уравнения геометрически нелинейной теории пологих оболочек	188
7.3.1. Уравнения равновесия	188
7.3.2. Уравнения движения	191
7.4. Прямые методы в вариационных задачах	193
7.4.1. Общая характеристика прямых методов	193
7.4.2. Метод Ритца	194
7.4.3. Вариационно-разностный метод	196
7.4.4. Метод конечных элементов как частный случай метода Ритца	197
7.5. Метод Власова — Канторовича	202
7.5.1. Сведение задач для уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям	202
7.5.2. Метод Власова — Канторовича в форме метода Галеркина	204
7.5.3. Метод вариационных итераций	207
8. Метод малого параметра	209
8.1. Решение нелинейных задач строительной механики	209
8.1.1. Представление решения задачи в виде степенных рядов	209
8.1.2. Задача об осесимметричном изгибе гибкой круглой пластинки	212
8.2. Решение задач статической и динамической устойчивости стержней	216
8.2.1. Решение задач на собственные значения	216
8.2.2. Задача о динамической устойчивости сжатого стержня	218
9. Методы решения линейных интегральных уравнений. Интегральные преобразования	222
9.1. Основные виды интегральных уравнений	222
9.1.1. Интегральные уравнения Фредгольма	222
9.1.2. Интегральные уравнения Вольтерра	225

9.1.3. Связь между линейным дифференциальным уравнением и уравнением Вольтерра	226
9.2. Приближенные методы решения интегральных уравнений	227
9.2.1. Решение с помощью резольвенты	227
9.2.2. Метод последовательных приближений	229
9.2.3. Решение интегральных уравнений методом Бубнова — Галеркина	230
9.3. Интегральные преобразования	230
9.3.1. Основные понятия	230
9.3.2. Преобразование Лапласа	231
9.3.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом	233
9.3.4. Решение интегральных уравнений операционным методом	235
9.3.5. Преобразование Лапласа — Карсона и его применение в задачах теории вязкоупругости	236
9.3.6. Преобразование Фурье	240
10. Методы решения задач строительной механики, основанные на теории потенциала	245
10.1. Метод потенциалов	245
10.1.1. Основные понятия теории потенциала	245
10.1.2. Интегральное представление функции	246
10.1.3. Свойства потенциалов	247
10.1.4. Применение метода потенциалов к решению задач Дирихле и Неймана	249
10.2. Метод граничных элементов	255
10.2.1. Основы метода. Теорема взаимности	255
10.2.2. Построение системы уравнений метода	256
10.3. Решение задачи о плоской деформации	257
10.3.1. Выбор контрольных решений	257
10.3.2. Вычисление коэффициентов влияния	260
10.3.3. Определение усилий и смещений внутри области	263
11. Методы решения нелинейных задач строительной механики	271
11.1. Методы последовательных приближений	271
11.1.1. Метод Ньютона — Канторовича решения операторных уравнений	271
11.1.2. Модифицированный метод Ньютона — Канторовича	272
11.2. Метод продолжения по параметру	273
11.2.1. Основные положения метода продолжения по параметру	273
11.2.2. Метод последовательных нагружений	273
11.2.3. Метод последовательного наращивания ребер	279
11.3. Методика решения геометрически нелинейных задач теории пластин и пологих оболочек	282
11.3.1. Нелинейные задачи статики	282
11.3.2. Нелинейные задачи динамики пологих оболочек	284
11.4. Методы решения физически нелинейных задач	286
11.4.1. Основные соотношения физически нелинейной теории упругости	286
11.4.2. Плоское напряженное состояние	288
11.4.3. Решение физически нелинейной задачи о плоском напряженном состоянии методом малого параметра	290

11.4.4. Метод упругих решений	292
11.4.5. Применение метода последовательных нагружений к расчету пластинок из нелинейно-упругого материала	294
11.5. Расчет гибких нитей и мембран	296
11.5.1. Статический расчет нити	296
11.5.2. Уточненный расчет пологой гибкой нити	299
11.5.3. Свободные поперечные колебания гибких нитей	302
11.5.4. Свободные поперечные колебания мембраны	303
12. Численные методы оптимизации	308
12.1. Линейное программирование	308
12.1.1. Задачи линейного программирования	308
12.1.2. Симплекс-метод	309
12.2. Нелинейное программирование	315
12.2.1. Задачи нелинейного программирования	315
12.2.2. Метод наискорейшего спуска (градиентный метод)	315
12.2.3. Метод покоординатного спуска (релаксационный метод)	316
12.2.4. Метод множителей Лагранжа	316
12.3. Геометрическое программирование	319
12.3.1. Основные понятия	319
12.3.2. Прямая задача геометрического программирования	320
Приложения	323
Литература	342
Предметный указатель	346

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из характерных особенностей научно-технического прогресса является широкое применение численных математических методов и ЭВМ в различных областях творческой деятельности человека, и тем более в расчетах всевозможных конструкций. Процесс математизации науки и техники требует от специалистов в каждой области деятельности навыков применения ЭВМ и использования для исследований машинно-ориентированных методов расчета.

Решение современных задач строительной механики связано с использованием новых материалов, особенно полимерных, а также более сложных расчетных схем, близких к реальным конструкциям: Это, естественно, приводит к увеличению числа факторов, которые необходимо учитывать при исследовании напряженно-деформированного состояния, устойчивости и колебаний конструкций, и усложняет расчет.

При комплексном подходе к решению сложных задач строительной механики аналитические методы в большинстве случаев малоэффективны. Статический и динамический расчет десятки и сотни раз статически неопределимых стержневых систем, таких сложных конструкций, как тонкие оболочки, крупные массивы гидротехнических сооружений, стал возможным только благодаря широкому применению численных методов расчета, ориентированных на использование ЭВМ. Применение этих методов способствовало становлению и развитию нового направления в исследовании сложных объектов статического и динамического расчета — вычислительного экспериментирования. В процессе проведения вычислительного эксперимента выбранная математическая модель подвергается всестороннему исследованию с целью ее уточнения и улучшения. Определяется, какими факторами можно пренебречь, а какие следует учесть. Кроме того, решаются вопросы выбора вычислительного алгоритма, оценки устойчивости процесса вычислений и его точности.

При использовании численных методов, ориентированных на применение ЭВМ, всегда получают некоторое приближенное решение задачи. Поэтому при выборе метода необходимо обеспечивать заданную точность вычислений, а кроме того, и устойчивость вычислительного процесса. Все это надо учитывать при постановке задачи и выборе алгоритма ее решения.

Настоящая книга является справочным пособием по численным методам, применяемым при решении задач строительной механики. Поэтому в ней нет формальных доказательств сходимости вычислительных процессов. Отсутствуют также многие обоснования и выводы формул, которые можно найти в литературе (список ее приведен в конце книги). Однако краткость изложения рассматриваемых методов достигнута, как представляется авторам, не в ущерб его строгости с математической точки зрения. В то же время пособие не претендует на полноту изложения численных методов решения задач различного рода.

Изложение иллюстрируется примерами применения различных методов, алгоритмами и их схемами. Отдельные задачи строительной механики, которые называются модельными, решены различными методами, чтобы наглядно выявить специфику последних.

Главы 1 и 7 пособия написал В. В. Карпов, 2, 4, 5 и 11 — В. П. Ильин и В. В. Карпов совместно, 3 и 6 — А. М. Масленников, 8 и 9 — В. П. Ильин, 10 и 12 — В. В. Карпов и А. М. Масленников совместно.

Авторы весьма признательны заведующему кафедрой строительной механики Московского инженерно-строительного института, профессору Н. Н. Леонтьеву и заведующему кафедрой строительной механики Саратовского политехнического института, профессору В. В. Петрову за ценные замечания при анализе рукописи книги. Авторы благодарны также заведующему кафедрой строительной механики Волгоградского инженерно-строительного института, профессору В. А. Игнатьеву и доценту кафедры теоретической механики Саратовского политехнического института Г. Н. Белосточному за предоставленные ими оригинальные материалы и примеры расчета.

Авторы

1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При решении задач строительной механики численными методами часто возникает необходимость приближения (аппроксимации) сложных для математических преобразований функций более простыми, какими, например, являются алгебраические многочлены. Решение краевых задач для дифференциальных уравнений методами Рунге, Бундса — Галеркина, Власова — Канторовича и другими связано с аппроксимацией искомых функций обобщенными многочленами (полиномами). Приближение функций наряду с методами их приближенного дифференцирования и интегрирования составляет основу численных методов, применяемых при решении задач строительной механики.

1.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛАГРАНЖА И НЬЮТОНА

1.1.1. Общие понятия о приближении функций. Аппроксимирующие функции

Пусть дана некоторая совокупность функций $\{\varphi_i(x)\}$. Предполагается, что в любой системе эти функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_i(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ линейно независимы и являются достаточно гладкими. На практике чаще всего в качестве $\{\varphi_i(x)\}$ принимают последовательность степеней x ($1, x, x^2, x^3, \dots$) или последовательность тригонометрических функций ($1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$).

Многочлены вида

$$Q(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x), \quad (1.1)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_m$ — постоянные коэффициенты, называются *обобщенными многочленами* (полиномами).

Задача о приближении некоторой функции $f(x)$ формулируется следующим образом: данную функцию $f(x)$ заменить (аппроксимировать) обобщенным многочленом $Q(x)$ так, чтобы ее отклонение от $Q(x)$ на заданном множестве $X = \{x\}$ было наименьшим. Этого можно достичь за счет надлежащего подбора коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_m$. Многочлен $Q(x)$ называется *аппроксимирующим*, а функции $\varphi_i(x)$ — *аппроксимирующими функциями*. Если множество $X = \{x\}$ состоит из отдельных точек $x_0, x_1, \dots$,

x_n , приближение называется *точечным*. Если же X — отрезок $a \leq x \leq b$, приближение называется *интегральным*.

Для практики весьма важен случай, когда система аппроксимирующих функций $\{\varphi_i(x)\}$ представляет собой последовательность целых неотрицательных степеней переменной x : $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, ..., $\varphi_m(x) = x^m$. В этом случае функции $Q(x)$ являются обычными полиномами вида

$$Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

где a_i — постоянные.

Пример 1.1. Функцию $f(x) = 3^x$ аппроксимировать на отрезке $[-1, 1]$ полиномом [25]

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 необходимо составить систему трех уравнений. Эту систему можно получить, если приравнять значения функции $f(x) = 3^x$ и $Q(x)$ в трех точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= 1/3, \\ a_0 &= 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $a_0 = 1$, $a_1 = 4/3$, $a_2 = 2/3$ и, следовательно,

$$3^x \approx 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2.$$

При решении задач теории пластин и оболочек вариационными методами Ритца, Власова — Канторовича, Бубнова — Галеркина возникает необходимость аппроксимации искомых функций перемещений многочленами (1.1). Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ при этом должна подбираться так, чтобы были выполнены граничные условия задачи. В качестве аппроксимирующих функций чаще всего используются следующие системы функций, заданных на отрезке $[0, 1]$: $\{\omega(x)x^{i-1}\}$, $\{\sin(\pi ix)\}$ ($i = 1, 2, \dots$), где $\omega(x)$ — положительная непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, имеющая в интервале $(0, 1)$ ограниченную и непрерывную производную и удовлетворяющая условиям $\omega(0) = \omega(1) = 0$.

Кроме того, в качестве аппроксимирующих функций используются фундаментальные балочные функции, предложенные В. З. Власовым [16]. Функции, составленные из обобщенных многочленов Лежандра для аппроксимации перемещений u, v, w , можно найти также в работе [32].

1.1.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Если функция $f(x)$ задана в некоторых точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, приходят к следующей задаче интерполирования: для данной функции $f(x)$ найти многочлен $Q(x)$, принимающий в заданных

точках x_i ($i=0; 1, \dots, n$) те же значения, что и функция $f(x)$:

$$Q(x_i) = f(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Многочлен $Q(x)$ называется *интерполяционным*.

Пусть некоторая функция $y=f(x)$ определяется табл. 1.1.

Табл. 1.1. Значения функции $y=f(x)$

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_i	y_i
...	...
x_n	y_n

Значения аргумента $x_0, x_1, \dots, x_n$ называют узловыми. Предполагается, что узловые значения x занумерованы в порядке их возрастания. Разность двух соседних узловых значений x (из большего вычитается меньшее) называется *шагом аргумента*.

Для нахождения значений функции $y=f(x)$, заданной табл. 1.1, при любых значениях аргумента $x \in [x_0, x_n]$, не совпадающих с его узловыми значениями, необходимо построить интерполяционный полином.

Для получения интерполяционного полинома Лагранжа используется сначала полином n -й степени

$$P_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)},$$

удовлетворяющий условию

$$P_k(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{при } l=k; \\ 0 & \text{при } l \neq k, \text{ где } k=0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

Интерполяционным полиномом Лагранжа называется полином

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x) y_k, \quad (1.2)$$

удовлетворяющий условию $P_n(x_l) = y_l$ при $l=0, 1, 2, \dots, n$.

Представление функции $f(x)$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа имеет вид

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Пример 1.2. Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $y=f(x)$, заданной табл. 1.2

Табл. 1.2. Значения функции $y=f(x)$ (к примеру 1.2)

x	y
1	2
2	4
3	7

Искомый полином по (1.2):

$$P_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} 2 + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} 7 = \\ = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 1.$$

1.1.3. Интерполяционный полином Ньютона

В практике часто функции заданы таблицей с постоянным шагом аргумента $h = x_{i+1} - x_i$. Для таких таблиц более удобен интерполяционный полином Ньютона, построение которого связано с понятием конечной разности.

Конечной разностью 1-го порядка называется разность соседних значений функции

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Конечная разность 2-го порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i=0, 1, \dots, n-2).$$

Аналогично *конечная разность k-го порядка:*

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (i=0, 1, \dots, n-k).$$

Интерполяционный полином Ньютона для функции $y=f(x)$, заданной таблицей с постоянным шагом аргумента $h = x_{i+1} - x_i$, имеет вид

$$P_n(x) = y_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\ + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — постоянные, найденные из условия совпадения в узлах значений интерполяционного полинома Ньютона и заданной функции:

$$A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h}; \\ A_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2!h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}; \\ \dots \dots \dots A_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \quad (1.3)$$

Пример 1.3. Построить интерполяционный полином Ньютона для функции $y=f(x)$, заданной табл. 1.2 с постоянным шагом $h=1$.

По формуле (1.3) искомый полином

$$P_2(x) = 2 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

1.2. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

1.2.1. Полиномиальный интерполяционный сплайн

Кроме интерполяции функции $y(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ одним многочленом $Q(x)$ по (1.1), возможна кусочно-полиномиальная интерполяция, называемая *сплайн-интерполяцией*.

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n одинаковых частных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i = a + ih$, $x_n = b$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. *Сплайном* называется функция, которая вместе с производными до некоторого порядка непрерывна на всем отрезке $[a, b]$, а на каждом частном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ является алгебраическим многочленом.

Степенью сплайна называется максимальная по всем частным отрезкам степень многочленов. Разность степени сплайна и порядка наивысшей непрерывной на $[a, b]$ производной называется *дефектом сплайна*. В практике наиболее широко используются сплайны третьей степени, имеющие на отрезке $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере первую, производную. Сплайны более удобны для аппроксимации функций на больших отрезках, чем интерполяционные многочлены. Аппроксимация в этом случае функции одним многочленом с заданной точностью требует значительного увеличения его степени. Сплайн-интерполяция широко применяется в методе конечных элементов.

Пример 1.4. Выполнить интерполяцию функции $y=y(x)$ сплайном третьей степени $f(x)$.

Коэффициенты сплайна в каждом частном интервале изменения аргумента определяются из условия сопряжения в узлах:

$$\begin{aligned} f_i &= y_i, \quad f'(x_i-0) = f'(x_i+0), \\ f''(x_i-0) &= f''(x_i+0) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Кроме того, на границах при $x=x_0$ и $x=x_n$ имеют место условия

$$f''(x_0) = 0, \quad f''(x_n) = 0. \quad (1.4)$$

Будем искать кубический полином в виде

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

где $x_{i-1} \leq x \leq x_i$.

Из условия $f_i = y_i$ следует, что

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= d_i = y_{i-1}, \\ f(x_i) &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \\ h_i &= x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Производные

$$\begin{aligned} f'(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \\ f''(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \end{aligned}$$

должны быть непрерывны при $x = x_i$. Следовательно,

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2; \quad c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (1.6)$$

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно $4n$, число уравнений (1.5) и (1.6) — $4n-2$. Недостающие два уравнения могут быть получены из условий (1.4) при $x = x_0$ и $x = x_n$: $c_1 = 0$, $c_n + 3d_n h_n = 0$.

Согласно (1.6), $d_i = (c_{i+1} - c_i) / (3h_i)$. Подставив это выражение в (1.5) и исключив $a_i = y_{i-1}$, найдем:

$$b_i = (y_i - y_{i-1}) / h_i - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i);$$

$$b_n = (y_n - y_{n-1}) / h_n - \frac{2}{3} h_n c_n.$$

Подставляя теперь выражения для b_i , b_{i+1} , d_i в первую из формул (1.6), после несложных преобразований получаем разностное уравнение второго порядка для определения c_i

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1}) c_{i+1} + h_{i+1} c_{i+2} = 3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (1.7)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1)$$

при краевых условиях

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0. \quad (1.8)$$

Условие $c_{n+1} = 0$ эквивалентно условию $c_n + 3d_n h_n = 0$ и уравнению $c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i$ при $i = n$. Разностное уравнение (1.7) с условиями (1.8) решается методом прогонки (см. § 2.2).

Есть понятие *полиномиального интерполяционного сплайна m -го порядка* как функции, являющейся полиномом m -й степени, но обычно в практике имеют место случаи $m=3$ (рассмотрен выше) и $m=1$ (линейный сплайн, соответствующий аппроксимации графика функции $y=f(x)$ ломаной, проходящей через точки (x_i, y_i)).

1.2.2. Применение сплайнов при решении задач методом конечных элементов

При использовании метода конечных элементов для решения, например, краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$ при аппроксимации искомой функции $w(x)$ необходимо на каждом конечном элементе (на частном участке $[x_{i-1}, x_i]$ отрезка $[0, a]$) построить полином $P_i(x)$, степень которого n должна удовлетворять условию $n+1 \geq 2m$, чтобы обеспечивать непрерывность искомой функции $w(x)$ и ее производных до $(m-1)$ -го порядка на всем отрезке $[0, a]$.

Таким образом, принимается

$$P_i(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k & \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ 0 & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

При определении неизвестных параметров α_k среди $(n+1)$ условий для каждого i -го участка будут содержаться следующие $2m$ условия при $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$:

$$\frac{\partial^j P_i(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j w(x)}{\partial x^j} \quad (j=0, 1, \dots, m-1). \quad (1.9)$$

Обычно принимают $n=2m-1$.

Параметры α_k могут быть выражены через значения функции $w(x)$ и ее производных в узлах интерполяции. Тогда

$$w(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x),$$

где N — число конечных элементов (число частных отрезков).

В примере 1.4 функция $y(x)$, которая заменялась сплайном, была известна. Поэтому коэффициенты разложения c_i можно было вычислить непосредственно из системы уравнений (1.7). В рассматриваемом случае функция $w(x)$ неизвестна. Ее узловые значения определяются из линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, аналогичных уравнениям (1.7).

Пример 1.5. Построить сплайн первого порядка на отрезке $[0, a]$ с дефектом, равным единице.

Такая задача возникает при использовании метода конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния стержней при растяжении, когда решается дифференциальное уравнение второго порядка ($m=1$). Следовательно, $n=2m-1=1$ и $P_i(x)$ будет иметь вид

$$P_i(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x.$$

Неизвестные параметры α_k определяются из условий:

$$P_i(x_{i-1}) = w(x_{i-1}), \quad P_i(x_i) = w(x_i).$$

Отсюда

$$\alpha_0 = (w_{i-1}x_i - w_i x_{i-1})/h; \quad \alpha_1 = (w_i - w_{i-1})/h,$$

где $w_{i-1} = w(x_{i-1})$; $w_i = w(x_i)$; $h = x_i - x_{i-1}$. Следовательно,

$$P_i(x) = w_{i-1} \frac{x_i - x}{h} + w_i \frac{x - x_{i-1}}{h} = w_{i-1} \varphi_{i-1}(x) - w_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x) = (x_i - x)/h$ — известные (координатные) функции.

Теперь искомым функцию $w(x)$ на всем отрезке $[0, a]$ можно представить в виде

$$w(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x),$$

где

$$P_i(x) = \begin{cases} w_{i-1} \varphi_{i-1}(x) - w_i \varphi_i(x) & \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ 0 & \text{при } x \in (x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

Отсюда видна «локальность» координатных функций $\varphi_i(x)$, каждая из которых оказывается отличной от нуля лишь в области конечных элементов, непосредственно примыкающих к данному узлу.

Пример 1.6. Построить сплайн третьего порядка на отрезке $[0, a]$ с дефектом, равным двум.

Если функция $w(x)$ описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка ($m=2$), которое используется в теории изгиба балок,

$$P_i(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3.$$

Условие (1.9) принимает вид:

$$P_i(x_{i-1}) = w_{i-1}; \quad P_i(x_i) = w_i; \quad P'_i(x_{i-1}) = w'_{i-1}; \quad P'_i(x_i) = w'_i,$$

где $w_{i-1} = w(x_{i-1})$; $w_i = w(x_i)$; $w'_{i-1} = w'(x_{i-1})$; $w'_i = w'(x_i)$.

Таким образом, для определения α_k имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1} + \alpha_2 x_{i-1}^2 + \alpha_3 x_{i-1}^3 &= w_{i-1}; \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \alpha_3 x_i^3 &= w_i; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 x_{i-1} + 3\alpha_3 x_{i-1}^2 &= w'_{i-1}; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 x_i + 3\alpha_3 x_i^2 &= w'_i, \end{aligned} \right\}$$

решая которую, находим:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1} + x_i^2 h - 2x_i h^2}{h^2} w'_i + \frac{x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1} - x_i^2 h}{h^2} w'_{i-1} + \\ &\quad + \frac{h^3 + 3x_i^2 x_{i-1} - 3x_i^3}{h^3} w_i + \frac{x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1}}{h^3} w_{i-1}; \\ \alpha_1 &= \frac{h^2 - hx_i + 3x_i x_{i-1}}{h^2} w'_i + \frac{hx_i + 3x_i x_{i-1}}{h^2} w'_{i-1} - \frac{6x_i x_{i-1}}{h^3} (w_i - w_{i-1}); \\ \alpha_2 &= \frac{h - 3(x_i + x_{i-1})}{2h^2} w'_i - \frac{h + 3(x_i + x_{i-1})}{2h^2} w'_{i-1} + \frac{3(x_i + x_{i-1})}{h^3} (w_i - w_{i-1}); \\ \alpha_3 &= \frac{1}{h^2} (w'_i + w'_{i-1}) - \frac{2}{h^3} (w_i - w_{i-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_i(x) = \sum_{k=1}^4 S_k \varphi_k(x),$$

где

$$S_1 = w'_i; \quad S_2 = w'_{i-1}; \quad S_3 = w_i; \quad S_4 = w_{i-1};$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{h^2} (x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1} + x_i^2 h - 2x_i h^2 + (h^2 - hx_i + 3x_i x_{i-1})x + \\ &\quad + 0,5(h - 3x_i - 3x_{i-1})x^2 + x^3); \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{h^2} (x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1} - x_i^2 h + (hx_i + 3x_i x_{i-1})x - 0,5(h + 3x_i + 3x_{i-1})x^2 + x^3);$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{h^3} (h^3 + 3x_i^2 x_{i-1} - 3x_i^3 - 6x_i x_{i-1} x + 3(x_i + x_{i-1})x^2 - 2x^3);$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{h^3} (x_i^3 - 3x_i^2 x_{i-1} + 6x_i x_{i-1} x - 3(x_i + x_{i-1})x^2 + 2x^3).$$

Таким образом, искомую функцию $w(x)$ можно аппроксимировать сплайном

$$w(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x),$$

где

$$P_i(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^4 S_k \varphi_k(x) & \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ 0 & \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

1.3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1.3.1. Приближенное дифференцирование функций

При решении практических задач часто требуется найти производные функции $y=f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное дифференцирование ее затруднено. В этих случаях обычно прибегают к приближенному дифференцированию. Для получения формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом $P(x)$, а затем полагают, что $f'(x) = P'(x)$ при $a \leq x \leq b$.

Иногда требуется определить производные функции $y(x)$ в узловых точках x_i . В этом случае, используя интерполяционный многочлен Ньютона, их можно находить по формулам:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \dots \right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right)$$

и т. д.

1.3.2. Приближенное интегрирование функций с помощью формулы Симпсона

При решении задач строительной механики иногда необходимо приближенное вычисление интегралов с помощью ЭВМ. Если подынтегральная функция $f(x)$ задана таблично или имеет громоздкое аналитическое выражение, вычисление ее первообразной затруднено. Из приближенных методов вычисления определенного интеграла наиболее распространенным является метод замены подынтегральной функции отрезками параболы с использованием формулы Симпсона.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ отрезок интегрирования $[a, b]$ делят на четное число $2m$ частей точками $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_{2m}=b$. Если обозначать $y_i=f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, 2m$), $h=(b-a)/(2m)$, формула Симпсона будет иметь вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})).$$

Эта формула имеет четвертый порядок точности (см. § 1.4.2).

Вычисления по формуле Симпсона легко программируются. Если она используется для вычисления интегралов при решении дифференциальных уравнений, необходимое число участков ($2m$) отрезка интегрирования существенно зависит от того, какое приближение рассматриваемого метода (Рунге, Бундса — Галеркина и др.) принято. В приближении указанных методов не выше 3-го при решении задач устойчивости и прочности пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке [32, 39] достаточно отрезок интегрирования $[0, 1]$ разбить на 20 частей.

1.4. СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ

1.4.1. Метод наименьших квадратов

В эксперименте по определению зависимости $y=f(x)$ может быть получена таблица вида 1.3. В силу неточностей эксперимента, обусловленных главным образом обстоятельствами случайного характера, значения $y_1, y_2, \dots, y_m$ будут определены с ошибкой. В связи с этим возникает задача: найти функцию $y=f(x)$, по возможности не содержащую упомянутых выше ошибок и отражающую в основном характер экспериментальной зависимости. Такая задача называется *сглаживанием экспериментальной зависимости*.

В рассматриваемом случае приходится решать две вспомогательные задачи: 1) определение вида сглаживающей функции, 2) определение значений параметров, входящих в сглаживающую функцию.

Первая из указанных задач не имеет однозначного решения. При выявлении вида сглаживающей функции учитывают харак-

Табл. 1.3. Зависимость y от x ,
полученная в результате эксперимента

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_i	y_i
...	...
x_m	y_m

тер расположения опытных (табл. 1.3) точек на плоскости xOy , а также общие закономерности исследуемого процесса или явления.

Чаще всего имеет место случай, когда сглаживающая функция

линейная:

$$y = \sum_{l=1}^n C_l \varphi_l(x) \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (1.10)$$

где C_l — постоянные, подлежащие определению; $\varphi_l(x)$ — некоторые известные линейно независимые функции аргумента x .

При определении C_l используют метод наименьших квадратов: искомые постоянные находят из условия, что сумма квадратов отклонений опытных значений функции $y=f(x)$ от значений сглаживающей функции (1.10) при одинаковых значениях аргумента должна быть минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - \sum_{l=1}^n C_l \varphi_l(x_i))^2 \rightarrow \min, \quad (1.11)$$

где S является функцией n аргументов ($C_1, C_2, \dots, C_n$).

Необходимое условие экстремума функции S

$$\frac{\partial S}{\partial C_k} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - \sum_{l=1}^n C_l \varphi_l(x_i)) \varphi_k(x_i) = 0, \quad (1.12)$$

где $k=1, 2, \dots, n$.

Пример 1.7. Найти функцию, отражающую экспериментальную зависимость y от x (табл. 1.4).

Будем искать зависимость y от x в виде

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 определяются из условия (1.12) при $\varphi_1(x) = x^2, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = 1$.

Система уравнений (1.12) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 362,95 C_1 + 148,36 C_2 + 63,79 C_3 &= 88,02, \\ 148,36 C_1 + 63,79 C_2 + 28,79 C_3 &= 36,81, \\ 63,79 C_1 + 28,79 C_2 + 14,00 C_3 &= 16,23. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, находим $C_1=0,168; C_2=0,102; C_3=0,187$.

Следовательно, аналитически функция $y=f(x)$, заданная табл. 1.4, может быть описана как $y=0,168x^2+0,102x+0,187$.

Табл. 1.4. Экспериментальная зависимость y от x (к примеру 1.7)

x	y	x	y	x	y	x	y
1,20	0,54	1,74	0,85	2,19	1,27	2,81	1,78
1,31	0,59	1,80	0,97	2,41	1,39	3,00	2,03
1,40	0,67	2,00	1,07	2,50	1,53		
1,61	0,76	2,14	1,18	2,68	1,60		

1.4.2. Погрешности численного решения задач строительной механики

Погрешности решения той или иной задачи строительной механики обусловлены различными факторами, три из которых являются основными. В первую очередь это *погрешность математи-*

ческой модели, которая редко отражает точно реальное явление. Как правило, в постановку задачи вводят упрощающие условия. Например, в описании поведения тонких пластин и оболочек принимают гипотезы Кирхгофа — Лява, при изгибе балок — гипотезу плоских сечений и др. При формировании математической модели необходимо выделить в моделируемом объекте главные черты анализируемого явления с целью последующего их отражения в этой модели.

При исследовании же математической модели с помощью вычислительного эксперимента точность результата определяется алгоритмом исследования этой модели, т. е. выбором метода решения поставленной задачи. Если решить задачу в точной постановке невозможно или очень трудно, ее заменяют приближенной задачей. Например, вместо краевой задачи решают ряд задач Коши или от исходных дифференциальных уравнений переходят к алгебраическим, используя метод конечных разностей. При этом возникает погрешность решения задачи, которую называют *погрешностью метода*.

И, наконец, при расчетах на ЭВМ точность результатов зависит от разрядности ее ячеек. Происходит округление результата того или иного действия и возникает *погрешность округления*.

Многие приближенные методы являются шаговыми, с помощью которых решение задачи находят последовательно при определенных значениях (шагах) изменения параметра дискретизации H . Это метод Рунге — Кутты, методы конечных разностей, последовательных нагружений и др.

О погрешности решения задач такими методами можно судить, выполнив расчет до определенного значения параметра H дважды: с шагом h_i и $2h_i$. Если при этом получаются большие расхождения в решениях, шаг h_i следует уменьшить. Для оценки погрешности шагового метода используют принцип Рунге, согласно которому погрешность E шагового метода [25]

$$E = |R_n - r_{2n}| / (2^m - 1),$$

где R_n, r_{2n} — приближенные решения при одном и том же значении H , полученные соответственно при шаге h_i и $2h_i$; m — порядок точности метода.

Порядок точности приближенного метода является важной его характеристикой и означает следующее.

Пусть известны значения $y_0, y_1, \dots, y_i$, соответствующие точному решению, а очередное y_{i+1} разложено по степеням h в ряд Тейлора

$$y_{i+1} = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}h + a_2^{(i)}h^2 + \dots,$$

где

$$a_p^{(i)} = \frac{1}{p!} y_i^{(p)} \quad (p=0, 1, \dots).$$

Пусть теперь в результате применения данного приближенного метода по $y_0, y_1, \dots, y_i$ найдено $y_{i+1}^* = \tilde{y}(x_i + h, y_0, y_1, \dots, y_i)$, которое

может быть записано в виде разложения в ряд по степеням h :

$$y_{i+1}^* = b_0^{(i)} + b_1^{(i)}h + b_2^{(i)}h^2 + \dots$$

Если для всех i выполняются равенства $b_p^{(i)} = a_p^{(i)}$ при $p = 0, 1, \dots, m$, а $b_{m+1}^{(i)} \neq a_{m+1}^{(i)}$ для некоторых i , то число m называется *порядком точности приближенного метода*. Говорят, что погрешность метода на каждом шаге имеет порядок $O(h^{m+1})$.

При использовании методов, в которых искомое решение может быть разложено в ряд (методы Бубнова — Галеркина, Рунге и др.), оценка погрешности производится сравнением результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда в разложении искомых функций.

X и F — искомый и заданный n -компонентные векторы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix},$$

совокупность которых образует n -мерное линейное пространство. Для этого пространства вводится понятие длины, или евклидовой нормы n -компонентных векторов:

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

а также определяется расстояние между любыми векторами X и Y

$$\rho(x, y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Пространство n -компонентных векторов с таким расстоянием между ними называется *n -мерным евклидовым пространством*.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы. К первой группе принадлежат точные, или прямые, методы — алгоритмы, позволяющие получить решение системы с помощью конечного числа арифметических действий. Сюда относят правило Крамера (решение систем с помощью определителей), метод Гаусса (метод исключения) и метод прогонки. Вторую группу составляют приближенные методы (в частности, итерационные).

При решении систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ правило Крамера не применяется, так как оно требует большего машинного времени, чем другие методы. Метод Гаусса используется при решении систем порядка до 10^3 , а итерационные методы — до 10^6 . Последние практически не применяются при решении задач строительной механики и здесь не рассматриваются. В общем случае для таких задач наиболее часто применяется метод Гаусса, а в частном случае, для систем уравнений с трех- или пятидиагональной матрицей коэффициентов, — метод прогонки.

2.1.2. Метод Гаусса

Метод последовательного исключения неизвестных Гаусса является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений вида (2.1) с невырожденной матрицей коэффициентов, т. е. с матрицей A , определитель которой отличен от нуля.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) матрицу коэффициентов системы

с треугольной матрицей коэффициентов

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Преобразованием исходной системы (2.1) к виду (2.5) завершается прямой ход метода Гаусса.

Алгоритм обратного хода заключается в последовательном нахождении неизвестных из уравнений (2.5): из последнего уравнения определяют x_n , из предпоследнего — x_{n-1} и т. д., пока из первого уравнения не определится значение x_1 .

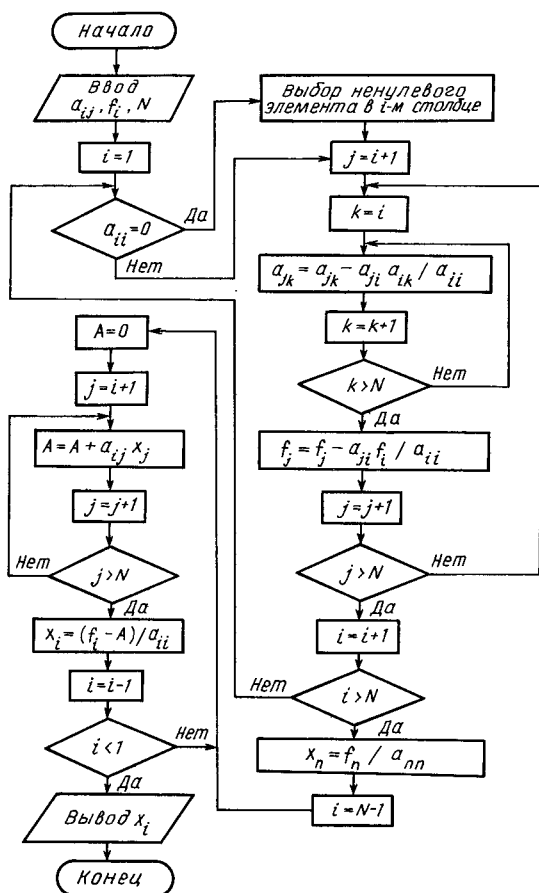


Рис. 2.1. Схема алгоритма решения систем линейных уравнений методом Гаусса

Число арифметических действий, выполняемых при решении системы линейных алгебраических уравнений порядка n методом Гаусса, в общем случае не превышает $2n^3/3$.

Пример 2.1. Найти методом Гаусса решение системы трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} 1,2357x_1 + 2,1742x_2 - 5,4834x_3 &= -2,0735; \\ 6,0696x_1 - 6,2163x_2 - 4,6921x_3 &= -4,8388; \\ 3,4873x_1 + 6,1365x_2 - 4,7483x_3 &= 4,8755. \end{aligned} \right\}$$

В прямом ходе для первого шага имеем: $m_{21} = -4,9119$; $m_{31} = -2,8221$.
В результате после первого шага получаем систему

$$\left. \begin{aligned} 1,2357x_1 + 2,1742x_2 - 5,4834x_3 &= -2,0735; \\ -16,8960x_2 + 22,2420x_3 &= 5,3460; \\ 0,0006x_2 + 10,7260x_3 &= 10,7270. \end{aligned} \right\}$$

Для второго шага вычисляем $m_{32} = 3,55 \cdot 10^{-5}$ и приводим заданную систему к системе уравнений с треугольной матрицей коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} 1,2357x_1 + 2,1742x_2 - 5,4834x_3 &= -2,0735; \\ -16,8960x_2 + 22,2420x_3 &= 5,3460; \\ 10,7270x_3 &= 10,7270, \end{aligned} \right\}$$

решая которую обратным ходом, находим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

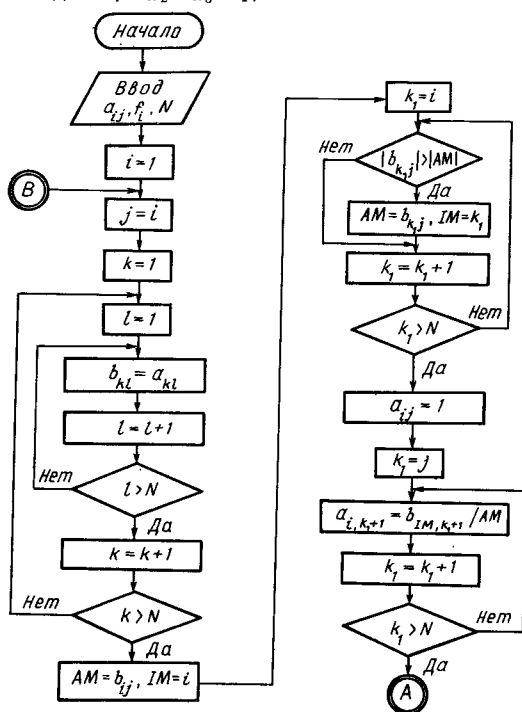


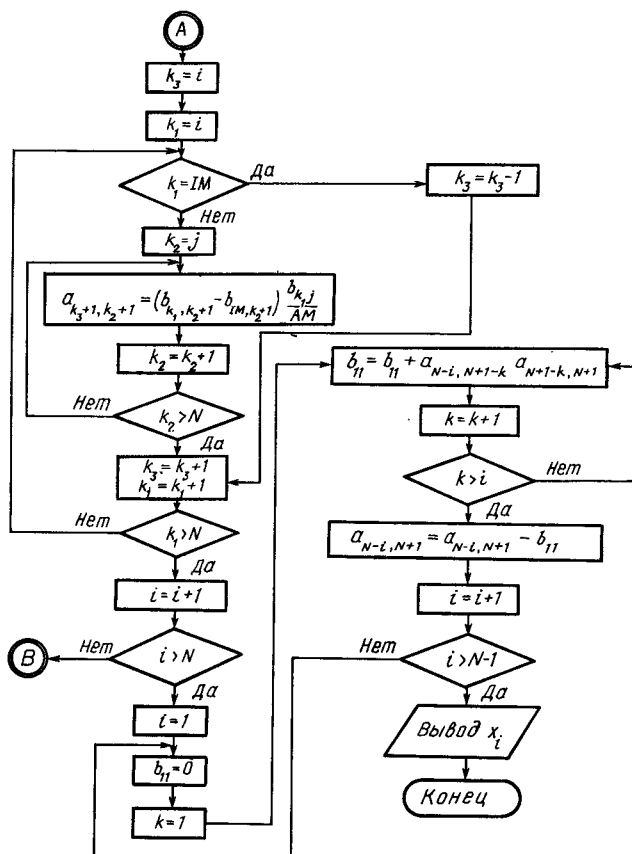
Рис. 2.2. Схема алгоритма решения систем линейных уравнений

Рассмотренный вариант метода Гаусса является простейшим. Схема его алгоритма приведена на рис. 2.1.

Большую точность при решении дает вариант метода Гаусса, связанный с выбором в качестве ведущего коэффициента шага наибольшего по модулю элемента соответствующего столбца матрицы коэффициентов системы (2.1).

В этом варианте (рис. 2.2) за ведущий коэффициент первого шага принимают не $a_{11} \neq 0$, а $a_{i1} = \max_{1 \leq k \leq n} \{a_{k1}\}$, за ведущий коэффициент второго шага — не $a_{22}^{(1)} \neq 0$, а $a_{i2}^{(1)} = \max_{2 \leq k \leq n} \{a_{k2}^{(1)}\}$, и т. д.

Процесс решения систем линейных уравнений методом Гаусса легко программируется, поэтому в математическое обеспечение ЭВМ входит стандартная программа решения систем уравнений этим методом.



2.1.3. Вычисление определителей и обращение матриц

Преобразование системы (2.1) к виду (2.5) в результате прямого хода метода Гаусса связано с преобразованием матрицы A к треугольному виду, что может быть использовано для вычисления ее определителя. Прямой ход метода Гаусса основан на многократно выполняемой операции сложения элементов одной из строк матрицы с элементами другой строки, умноженными на некоторое число. Известно, что в результате такой операции определитель матрицы не изменяется. Однако при этом может возникнуть необходимость перестановки строк матрицы, чтобы перед началом очередного шага ведущий элемент a_{ii}^{i-1} был отличен от нуля. В результате этой операции изменяется знак определителя. Значение определителя матрицы A равно произведению диагональных членов матрицы R по (2.6), умноженному на $(-1)^k$:

$$\det A = (-1)^k \det R = (-1)^k a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}, \quad (2.7)$$

где k — число перестановок строк в процессе преобразования матрицы A к треугольному виду R .

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы коэффициентов системы уравнений из примера 2.1.

Так как при преобразовании этой системы к треугольному виду перестановок уравнений не было, $k=0$. Следовательно, согласно (2.7),

$$\det A = \det R = 1,2357 (-16,8960) 10,7270 = -223,97.$$

Число операций, требуемых для вычисления определителя по методу Гаусса, значительно меньше, чем при вычислении определителя как суммы $n!$ его членов.

При решении задач строительной механики численными методами одной из распространенных операций является обращение матриц, т. е. нахождение для невырожденной матрицы A обратной матрицы A^{-1} , такой, что

$$AA^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица.

Применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы основано на том, что ее j -й столбец совпадает со столбцом $X_j = [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}]^*$, который является решением системы линейных уравнений

$$AX_j = B_j, \quad (2.8)$$

где

$$B_j = [\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}]^*, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j; \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} — символ Кронекера, а «звездочка» означает знак транспонирования, т. е. преобразования строки в столбец.

Для того чтобы найти матрицу A^{-1} , обратную заданной матрице A порядка n , следует отыскать решения n систем уравнений (2.8)

для $j=1, 2, \dots, n$ и записать эти решения в качестве соответствующих столбцов матрицы A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пример 2.3. Найти обратную матрицу для невырожденной матрицы порядка $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (2.8) имеем три системы уравнений ($j=1, 2, 3$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \end{bmatrix}.$$

Решая эти системы методом Гаусса, получим три столбца решений:

$$X_1 = [1, 1, -2]^*, \quad X_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^*,$$

$$X_3 = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]^*,$$

которые образуют обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

2.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

2.2.1. Метод прогонки для систем уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов

Метод прогонки применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов специального вида, к которым приводятся многие задачи строительной механики. Например, раскрытие статической неопределимости неразрезных балок или многоэтажных рам связано с необходимостью решения системы линейных алгебраических уравнений с трех-

диагональной матрицей коэффициентов, все элементы которой, не лежащие на главной и двух соседних диагоналях, равны нулю.

Алгоритм метода прогонки решения систем линейных уравнений вида

$$AX=B, \quad (2.9)$$

где A — трехдиагональная матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_N & 1 \end{bmatrix},$$

$X = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N]^T$ — столбец неизвестных, $B = [\beta_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-2}, f_{N-1}, \beta_N]^T$ — столбец заданных чисел, состоит из прямого и обратного ходов.

Прямой ход метода прогонки начинается с первого шага: подстановка найденного из первого уравнения системы (2.9) выражения $x_0 = \alpha_0 x_1 + \beta_0$, где α_0, β_0 — заданные числа, во второе уравнение системы дает аналогичное выражение

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1, \quad (2.10)$$

где $\alpha_1 = B_1 / (C_1 - A_1 \alpha_0)$, $\beta_1 = (A_1 \beta_0 - f_1) / (C_1 - A_1 \alpha_0)$.

На втором шаге выражение (2.10) для x_1 , подставленное в третье уравнение системы (2.9), дает аналогичное выражение для x_2 : $x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2$, где

$$\alpha_2 = B_2 / (C_2 - A_2 \alpha_1), \quad \beta_2 = (A_2 \beta_1 - f_2) / (C_2 - A_2 \alpha_1).$$

Рекуррентная формула i -го шага прямого хода определяет выражение для x_i при $i \leq N-1$:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha_i = B_i / (C_i - A_i \alpha_{i-1}), \quad \beta_i = (A_i \beta_{i-1} - f_i) / (C_i - A_i \alpha_{i-1}). \quad (2.12)$$

При $i = N-1$ из (2.11) получают выражение для последнего шага прямого хода

$$x_{N-1} = \alpha_{N-1} x_N + \beta_{N-1}. \quad (2.13)$$

Вычислением коэффициентов α_i, β_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) по (2.12) заканчивается прямой ход метода прогонки.

Обратный ход метода прогонки начинают с нахождения x_N из совместного решения последнего уравнения системы (2.9) и уравнения (2.13):

$$x_N = (\beta_N + \alpha_N \beta_{N-1}) / (1 - \alpha_N \alpha_{N-1}), \quad (2.14)$$

где α_N и β_N — заданные числа, а α_{N-1} и β_{N-1} — найденные на прямом ходу коэффициенты прогонки.

Затем по рекуррентной формуле (2.11) определяют в обратном порядке значения остальных неизвестных $x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_0$.

Условия корректности метода прогонки: $C_i - A_i \alpha_{i-1} \neq 0$, $\alpha_N \alpha_{N-1} < 1$.

Пример 2.4. Раскрыть статическую неопределимость однопролетной пятиэтажной рамы (рис. 2.3), загруженной горизонтальной узловой нагрузкой [75]. Жесткость при изгибе всех элементов рамы одинакова ($EI = \text{const}$).

В основной системе метода перемещений (см. гл. 3) оставлены только кососимметричные неизвестные $Z_1, Z_2, \dots, Z_5$, которыми являются углы поворота узлов

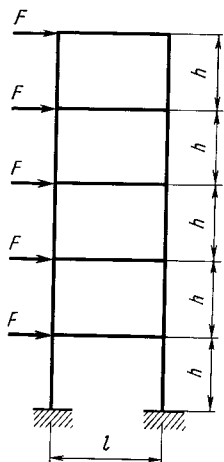


Рис. 2.3. Статически неопределимая однопролетная пятиэтажная рама

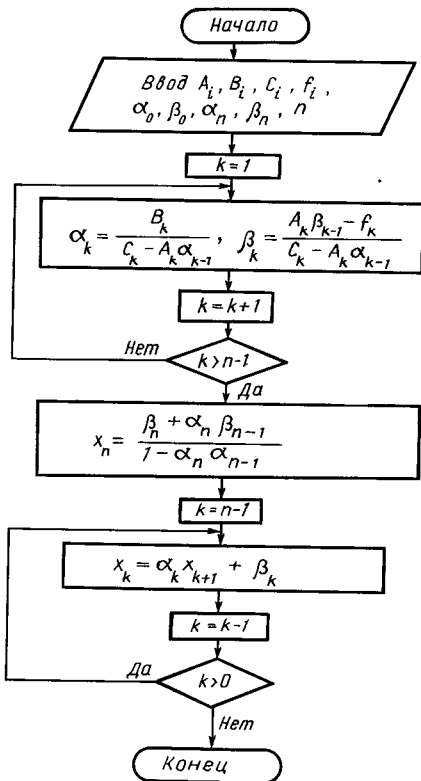


Рис. 2.4. Схема алгоритма решения методом прогонки систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов

сопряжения стоек с ригелями. Система канонических уравнений метода перемещений имеет вид (2.9) с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 - 0,143Z_2 &= 0,0357f; \\ Z_1 - 8Z_2 + Z_3 &= -0,75f; \\ Z_2 - 8Z_3 + Z_4 &= -1,25f; \\ Z_3 - 8Z_4 + Z_5 &= -1,75f; \\ -0,125Z_4 + Z_5 &= 0,2812f, \end{aligned} \right\}$$

где $f = Fh^2 / (EI)$ — безразмерный параметр узловой нагрузки F .

Значения коэффициентов данной системы уравнений в обозначениях метода прогонки $A_i = B_i = 1$; $\alpha_0 = 0,143$; $\alpha_5 = 0,125$; $C_i = 8$; $\beta_0 = 0,0357f$; $\beta_5 = 0,2812f$.

Используя формулы прямого хода (2.12), определяем коэффициенты прогонки ($\alpha_1 = 0,127$, $\beta_1 = 0,100f$; $\alpha_2 = 0,127$, $\beta_2 = 0,171f$; $\alpha_3 = 0,127$, $\beta_3 = 0,244f$) и обратным ходом по (2.14), (2.11) вычисляем неизвестные углы поворота: $Z_1 = 0,0538f$; $Z_2 = 0,1263f$; $Z_3 = 0,2070f$; $Z_4 = 0,2836f$; $Z_5 = 0,3166f$.

Статическая неопределимость рамы раскрыта.

Метод прогонки применяется также для решения разностного уравнения, к которому приводит применение метода конечных разностей для анализа краевых задач строительной механики (см. § 4.4). Метод прогонки (рис. 2.4) удобен при использовании ЭВМ, количество арифметических действий равно $8N - 1$.

2.2.2. Метод прогонки для систем уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов

Алгоритм решения методом прогонки систем линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов [12] отличается от изложенного выше.

Задана система линейных алгебраических уравнений

$$AX = B, \quad (2.15)$$

где A — пятидиагональная матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & d_0 & e_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-2} & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & d_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & b_N & c_N \end{bmatrix};$$

$X = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_N]^*$ — столбец неизвестных; $B = [f_0, f_1, f_2, \dots, f_N]^*$ — столбец заданных чисел.

Решение уравнений (2.15) представляют в виде

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i x_{i+2} + \gamma_i \quad (i=0, 1, \dots, N-2), \quad (2.16)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — неизвестные пока коэффициенты прогонки.

Прямой ход метода начинается с определения значений коэффициентов прогонки при $i=0, i=1$. Для этого из первых двух уравнений (2.15) исключают x_0 с помощью соотношений (2.16) и получают:

$$\alpha_0 = -d_0/c_0; \quad \beta_0 = -e_0/c_0; \quad \gamma_0 = f_0/c_0;$$

$$\alpha_1 = -(d_1 + b_1\beta_0)/(c_1 + b_1\alpha_0); \quad \beta_1 = -e_1/(c_1 + b_1\alpha_0);$$

$$\gamma_1 = (f_1 - b_1\gamma_0)/(c_1 + b_1\alpha_0).$$

Далее значения x_{i-2} и x_{i-1} , определенные по формуле (2.16), подставляют в третье уравнение (2.15), которое приводят к виду (2.16). Путем сравнения коэффициентов полученных уравнений приходят к рекуррентным соотношениям для коэффициентов прогонки:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{d_i + a_i \alpha_{i-2} \beta_{i-1} + b_i \beta_{i-1}}{c_i + a_i \alpha_{i-2} \alpha_{i-1} + a_i \beta_{i-2} + b_i \alpha_{i-1}}; \\ \beta_i &= -\frac{e_i}{c_i + a_i \alpha_{i-2} \alpha_{i-1} + a_i \beta_{i-2} + b_i \alpha_{i-1}}; \\ \gamma_i &= \frac{f_i - a_i \alpha_{i-2} \gamma_{i-1} - a_i \gamma_{i-2} - b_i \gamma_{i-1}}{c_i + a_i \alpha_{i-2} \alpha_{i-1} + a_i \beta_{i-2} + b_i \alpha_{i-1}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где $i=2, 3, \dots, N-2$.

Вычислением всех коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ по формулам (2.17) завершается прямой ход метода прогонки.

Неизвестные x_i находят обратным ходом, который начинается с определения значений x_N, x_{N-1}, x_{N-2} и x_{N-3} из системы четырех уравнений: последнего и предпоследнего уравнений системы (2.15) и двух уравнений (2.16) при $i=N-2, i=N-3$:

$$\left. \begin{aligned} a_N x_{N-2} + b_N x_{N-1} + c_N x_N &= f_N; \\ a_{N-1} x_{N-3} + b_{N-1} x_{N-2} + c_{N-1} x_{N-1} + d_{N-1} x_N &= f_{N-1}; \\ x_{N-2} &= \alpha_{N-2} x_{N-1} + \beta_{N-2} x_N + \gamma_{N-2}; \\ x_{N-3} &= \alpha_{N-3} x_{N-2} + \beta_{N-3} x_{N-1} + \gamma_{N-3}. \end{aligned} \right\}$$

Остальные неизвестные x_i при $i=N-4, N-5, \dots, 0$ определяют по (2.16).

Корректность данного метода обеспечивается условием: знаменатели коэффициентов прогонки не должны принимать нулевого значения.

2.3. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.3.1. Характеристика обусловленности матриц

Матрицу коэффициентов A системы линейных уравнений (2.2) так же, как и ее правую часть F , во многих случаях задают приближенно. Для оценки влияния погрешности в исходных данных на точность получаемого результата вводится характеристика, называемая *обусловленностью матрицы*, определение которой связано с понятием о наибольшем значении вектора AX

$$M = \sup \|AX\|$$

и наименьшем его значении

$$m = \inf \|AX\| \geq 0,$$

где $\|AX\|$ — норма вектора AX , а $m=0$ только для вырожденной матрицы A .

Обусловленностью невырожденной матрицы A называется отношение $\mu = M/m \geq 1$.

При неточном задании исходных данных системы уравнений (2.2), например погрешности в правой части ΔF , возможна ошибка в решении системы ΔX . Тогда для относительных нормированных значений погрешности и соответствующей ошибки справедливо неравенство

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \mu \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}, \quad (2.18)$$

где μ играет роль множителя, определяющего максимально возможное увеличение ошибки. Если значение μ близко к единице, матрица коэффициентов системы хорошо обусловлена. По мере увеличения μ чувствительность решения к погрешности в исходных данных возрастает, что означает плохую обусловленность матрицы коэффициентов системы уравнений.

Данную характеристику обусловленности матриц, а также другие (например, меру обусловленности $\nu(A)$, приведенную в [17]), трудно применить для оценки матриц коэффициентов систем уравнений в практических задачах. Поэтому вводят приближенную оценку, связанную с понятием устойчивости обратной матрицы A^{-1} .

Матрица коэффициентов A системы линейных алгебраических уравнений

$$AX = F$$

называется *хорошо обусловленной*, если ее обратная матрица A^{-1} является устойчивой, т. е. если элементы обратной матрицы мало изменяются при малом изменении элементов исходной матрицы A .

Пример 2.5. Проверить обусловленность невырожденной матрицы порядка $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,114 & -0,029 \\ -0,071 & 0,143 \end{bmatrix}.$$

Изменим элементы первого столбца исходной матрицы на малую величину (порядка 5 %). Получим матрицу

$$A_* = \begin{bmatrix} 9,5 & 2 \\ 5,25 & 8 \end{bmatrix},$$

обратной матрицей которой будет

$$A_*^{-1} = \frac{1}{65,5} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5,25 & 9,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,122 & -0,030 \\ -0,079 & 0,145 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая элементы этой матрицы с элементами матрицы A^{-1} , видим, что они почти совпадают. Поэтому обратная матрица является устойчивой, а исходная матрица A — хорошо обусловленной.

Если элементы обратной матрицы A^{-1} существенно изменяются при малом изменении элементов исходной матрицы A , обратная матрица является неустойчивой, а исходная матрица — *плохо обусловленной*.

Пример 2.6. Проверить обусловленность неособенной матрицы порядка $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Изменим элементы первого столбца исходной матрицы A на 2—3%:

$$A_* = \begin{bmatrix} 6,10 & 7 \\ 5,15 & 6 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A_*^{-1} = \frac{1}{0,55} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5,15 & 6,10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,91 & -12,73 \\ -9,36 & 11,09 \end{bmatrix}.$$

Из сравнения ее с матрицей A^{-1} видно, что значения ее элементов изменились почти вдвое при малом изменении элементов исходной матрицы. Следовательно, обратная матрица является неустойчивой, а исходная матрица — плохо обусловленной.

Решение системы уравнений с плохо обусловленной матрицей коэффициентов является неустойчивым, т. е. может существенно меняться при малом изменении исходных данных (коэффициентов или свободных членов). Кроме того, решение системы уравнений с плохо обусловленной матрицей коэффициентов оказывается весьма чувствительным к накоплению ошибок округления при реализации алгоритмов метода Гаусса или метода прогонки.

Пример 2.7. Найти решение системы двух уравнений с двумя неизвестными при плохо обусловленной матрице коэффициентов (см. пример 2.6):

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &= 1; \\ 5x_1 + 6x_2 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы: $x_1 = -8$, $x_2 = 7$.

При незначительной погрешности исходных данных коэффициенты матрицы изменились на 2—3%:

$$\left. \begin{aligned} 6,10x_1 + 7x_2 &= 1; \\ 5,15x_1 + 6x_2 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

В этом случае решение системы будет другое: $x_1 = -14,54$, $x_2 = 12,80$, которое отличается от предыдущего почти в два раза. Таким образом, решение системы уравнений с плохо обусловленной матрицей оказалось неустойчивым.

2.3.2. Способы улучшения обусловленности матриц

Для оценки обусловленности матриц существуют специальные методы линейной алгебры [17], связанные с понятиями нормы матрицы и величины, называемой мерой обусловленности матрицы. Отыскание этой величины связано с большими вычислительными трудностями. В практических задачах для этой цели удобнее проводить простой вычислительный эксперимент с обратной матрицей, изложенный в § 2.3.1.

Наглядные, хотя и приближенные признаки, характеризующие обусловленность матрицы, дает сравнение значений ее элементов. Матрица является хорошо обусловленной, если все элементы ее главной диагонали много больше любого второстепенного элемента, т. е. $a_{ii} \gg a_{ij}$ или по крайней мере $a_{ii} > a_{ij}$ (см. пример 2.5). Разреженность матрицы коэффициентов, т. е. наличие нулевых элементов, улучшает ее обусловленность.

Матрица может быть плохо обусловленной, если некоторые ее диагональные элементы (или даже один из них a_{jj}) оказываются малыми по сравнению с другими диагональными элементами. Плохо обусловленной является также матрица, все элементы которой имеют одинаковый порядок (см. пример 2.6).

Матрица коэффициентов системы линейных уравнений является плохо обусловленной, если элементы двух или более ее столбцов оказываются почти линейно зависимыми, т. е.

$$[a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}]^* \approx c [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}]^*,$$

где $c = \text{const}$.

Плохая обусловленность матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений имеет простую геометрическую интерпретацию. В системе двух уравнений с двумя неизвестными каждое уравнение может быть представлено прямой линейной в плоскости. Точка пересечения двух прямых дает решение системы — значения x_1 и x_2 . Если угол между заданными прямыми мал (т. е. прямые почти параллельны), то при любом малом отклонении какой-либо из этих прямых от заданного положения (малое изменение коэффициентов или свободных членов) новое положение точки их пересечения (x_1^*, x_2^*) может существенно отличаться от первоначального (x_1, x_2) . Таким образом, решение заданной системы уравнений оказывается неустойчивым.

Аналогично с геометрических позиций можно трактовать плохую обусловленность матрицы системы уравнений 3-го порядка (пересечение плоскостей) или n -го порядка (пересечение гиперплоскостей).

При расчете статически неопределимых стержневых конструкций методами строительной механики устойчивость решения соответствующих систем линейных уравнений существенно зависит от выбора основной системы рассматриваемой конструкции, которая образуется из заданной за счет отбрасывания лишних связей (метод сил). Чем ближе основная система по своим свойствам

к заданной, тем лучше обусловленность матрицы коэффициентов соответствующей системы канонических уравнений.

Пример 2.8. Для неразрезной балки с двумя промежуточными опорами, с одинаковыми пролетами l и постоянной жесткостью при изгибе $EI = \text{const}$ (рис. 2.5)

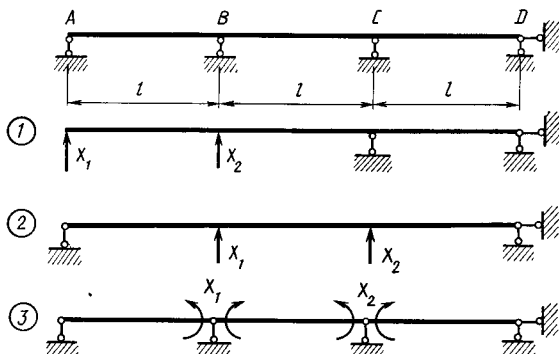


Рис. 2.5. Неразрезная балка. Варианты основной системы

найти вариант основной системы с хорошо обусловленной матрицей коэффициентов канонических уравнений метода сил [82].

Заданная балка является два раза статически неопределимой. Канонические уравнения метода сил (см. гл. 3) имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = \delta_{10}; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = \delta_{20}. \end{cases}$$

Рассмотрим три варианта выбора основной системы балки и оценим обусловленность соответствующих им матриц коэффициентов канонических уравнений.

Вариант 1. Незвестные X_1 и X_2 представляют собой реакции отброшенных связей опор A и B . Матрица коэффициентов системы канонических уравнений

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 24 & 9 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Оценим обусловленность полученной матрицы коэффициентов. Можно сразу сказать, что этот вариант основной системы выбран неудачно, так как $\delta_{22} \ll \delta_{11}$.

Найдем обратную матрицу (см. § 2.1.3)

$$A^{-1} = \left(\frac{l^3}{6EI} \right)^{-1} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 24 \end{bmatrix} = \left(\frac{l^3}{6EI} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,27 & -0,60 \\ -0,60 & 1,6 \end{bmatrix}$$

Изменим элементы первого столбца исходной матрицы: элемент δ_{11} — на величину порядка 2%, а элемент δ_{21} — 5%. Получим матрицу

$$A_* = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 23,5 & 9 \\ 9,5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Обратной матрицей для нее будет

$$A_*^{-1} = \left(\frac{l^3}{6EI} \right)^{-1} \frac{1}{8,5} \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -9,5 & 23,5 \end{bmatrix} = \left(\frac{l^3}{6EI} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,47 & -1,06 \\ -1,12 & 2,76 \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы оказались почти в два раза больше элементов обратной матрицы A^{-1} . Следовательно, обратная матрица является неустойчивой, а исходная матрица коэффициентов A для варианта 1 основной системы — плохо обусловленной.

Вариант 2. Неизвестные X_1 и X_2 представляют собой реакции отброшенных связей промежуточных опор балки B и C . Матрица коэффициентов системы канонических уравнений метода сил имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{18EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Этот вариант основной системы также не является удачным, так как все элементы матрицы A есть величины одного порядка, и диагональные элементы δ_{ii} мало отличаются от остальных.

Оценим обусловленность матрицы A данного варианта. Обратная матрица

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(\frac{l^3}{18EI} \right)^{-1} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{l^3}{18EI} \right) \begin{bmatrix} 0,53 & -0,47 \\ -0,47 & 0,53 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Изменим элементы первого столбца исходной матрицы A на 5%:

$$A_* = \frac{l^3}{18EI} \begin{bmatrix} 7,5 & 7 \\ 7,3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Обратной матрицей для нее будет

$$\begin{aligned} A_*^{-1} &= \left(\frac{l^3}{18EI} \right)^{-1} \frac{1}{8,9} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7,3 & 7,5 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{l^3}{18EI} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,90 & -0,77 \\ -0,82 & 0,84 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что и для варианта 2 обратная матрица является неустойчивой, а исходная матрица коэффициентов A — плохо обусловленной.

Вариант 3. Неизвестными X_1 и X_2 являются изгибающие моменты в балке над опорами B и C . Матрица коэффициентов системы канонических уравнений метода сил имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Этот вариант основной системы, судя по матрице A , является лучшим, так как здесь $\delta_{ii} \gg \delta_{ij}$. Оценим обусловленность матрицы A . Обратная матрица

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(\frac{l}{6EI} \right)^{-1} \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{l}{6EI} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,27 & -0,067 \\ -0,067 & 0,27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Изменим элементы первого столбца исходной матрицы A на 5%. Получим матрицу

$$A_* = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 3,8 & 1 \\ 0,95 & 4 \end{bmatrix}.$$

Обратной матрицей для нее будет

$$\begin{aligned} A_*^{-1} &= \left(\frac{l}{6EI} \right)^{-1} \frac{1}{14,25} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -0,95 & 3,8 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{l}{6EI} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0,28 & -0,07 \\ -0,067 & 0,27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что элементы обратной матрицы изменились мало при незначительном изменении элементов исходной матрицы; следовательно, обратная матрица является устойчивой, а исходная — хорошо обусловленной. Это подтверждает вывод о том, что вариант 3 основной системы для заданной статически неопределимой балки является лучшим.

2.4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

2.4.1. Собственные значения и собственные векторы матриц

Многие проблемы строительной механики стержневых систем, связанные с их динамическим расчетом или расчетом на устойчивость, приводятся к задаче о собственных значениях и собственных векторах матриц коэффициентов систем линейных уравнений.

Если A — квадратная матрица n -го порядка, то любой вектор $X \neq 0$, для которого справедливо уравнение

$$AX = \lambda X, \quad (2.19)$$

называется *собственным вектором матрицы A* , а число λ — соответствующим ему *собственным значением этой матрицы*.

Уравнение (2.19) эквивалентно матричному уравнению

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad (2.20)$$

которое в скалярной форме представляет собой систему однородных линейных уравнений (здесь E — единичная матрица), нетривиальное решение которой (т. е. $X \neq 0$) существует только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов уравнения (2.20) равен нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (2.21)$$

Матрица коэффициентов $(A - \lambda E)$ уравнения (2.20) называется *характеристической матрицей* заданной матрицы A , а уравнение n -й степени (2.21) относительно λ — ее *характеристическим уравнением*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), среди которых могут быть кратные. Совокупность всех собственных значений называется *спектром матрицы*. Если найдено некоторое собственное значение λ_i , то, подставив его в систему уравнений (2.20), можно определить соответствующий собственный вектор.

Квадратные матрицы A_1 и A_2 , для которых справедливо преобразование

$$A_2 = S^{-1} A_1 S, \quad (2.22)$$

где S — невырожденная преобразующая матрица, называются *подобными*. Преобразование (2.22) называется преобразованием подобия.

Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические уравнения и, следовательно, одинаковые собственные значения. Каждая матрица A подобна транспонированной матрице A^* .

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A , их сумма равна сумме диагональных элементов матрицы, т. е. ее следу $\text{Sp } A$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Sp } A. \quad (2.23)$$

Произведение собственных значений матрицы A равно определителю этой матрицы

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A, \quad (2.24)$$

откуда следует, что матрица A является невырожденной только тогда, когда ее собственное значение не равно нулю. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — спектр невырожденной матрицы A , то спектр обратной матрицы A^{-1} образуют числа $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ и вообще для любого целого k спектр матрицы A^k имеет вид $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

Каждому простому (не кратному) собственному значению матрицы соответствует один собственный вектор, а совокупности простых собственных значений — совокупность линейно независимых собственных векторов. Таким образом, если все собственные значения матрицы простые, то она имеет n линейно независимых собственных векторов, которые образуют базис пространства (полную систему векторов).

Задача нахождения всех собственных значений и собственных векторов матрицы называется полной проблемой собственных значений. Эта задача в общем случае достаточно сложная. Она легко решается только для некоторых матриц простых форм: диагональной, трехдиагональной, треугольной или почти треугольной. Многие численные методы решения задач на собственные значения основаны на приведении матрицы к одной из этих форм.

Пример 2.9. Исходя из системы канонических уравнений метода сил (см. § 3.1), записать характеристическое уравнение, определяющее частоты свободных колебаний балки с n сосредоточенными массами (рис. 2.6).

В заданной балке силы инерции точечных масс m_k представлены в виде усилий в упругих связях $X_k = -m_k \omega_i^2 y_{ki}$. Основной системе, изображенной на рис. 2.6, соответствует однородная система канонических уравнений метода сил

$$\begin{bmatrix} m_1 \delta_{11} - \lambda_i & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \lambda_i & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix} = 0,$$

где $\lambda_i = 1/\omega_i^2$; ω_i^2 — квадрат i -й частоты свободных колебаний заданной балки; δ_{ki} — перемещение массы m_k от единичной силы, приложенной по направлению движения массы m_i ; y_{ki} — неизвестные перемещения точечных масс m_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Поставленная задача соответствует задаче на собственные значения матрицы (2.20). Данной системе однородных канонических уравнений соответствует ха-

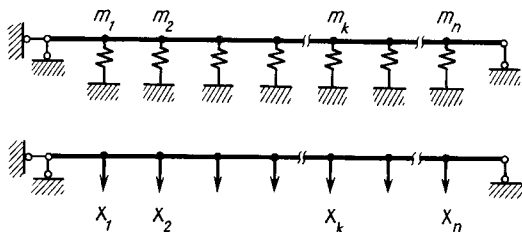


Рис. 2.6. Схема балки с n сосредоточенными массами и ее основная система

актеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - \lambda_i & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - \lambda_i & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & m_n\delta_{nn} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0.$$

Решив это алгебраическое уравнение n -й степени, получим n корней $\lambda_i = 1/\omega_i^2$, т. е. n собственных значений матрицы коэффициентов системы канонических уравнений задачи.

Собственные векторы y_{ki} определяются с точностью до постоянного множителя для каждого найденного собственного значения λ_i из решения исходной системы канонических уравнений.

2.4.2. Нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы

Если квадратная матрица A порядка n имеет полную систему нормированных собственных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, т. е. $Ae_i = \lambda_i e_i$, $\|e_i\| = 1$, где λ_i — собственное значение матрицы, отвечающее собственному вектору e_i , наибольшее по модулю собственное значение λ_1 при условии $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ можно определить приближенно итерационным методом, не прибегая к решению соответствующего характеристического уравнения.

В начале процесса задают произвольный ненулевой вектор

$$X^{(0)} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^*$$

в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ при условии $c_1 \neq 0$. Этот вектор нормируется и принимается за первое приближение собственного вектора e_1 , т. е.

$$e_1^{(0)} = \frac{X^{(0)}}{\|X^{(0)}\|},$$

где норма вектора $X^{(0)}$ определяется по формуле

$$\|X^{(0)}\| = \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2}.$$

Все последующие приближения собственного вектора e_1 определяют с помощью итерационного процесса:

$$X^{(k)} = A e_1^{(k-1)}; e^{(k)} = \frac{X^{(k)}}{\|X^{(k)}\|}, \quad (2.25)$$

а соответствующие приближения собственного значения λ_1 находят из скалярного произведения двух векторов

$$\lambda_{1k} = (X^{(k)}, e_1^{(k-1)}), \quad (2.26)$$

которое вычисляют при известных координатах по обычной формуле $(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Здесь индекс k означает номер приближения.

Данный итерационный процесс позволяет найти наибольшее по модулю собственное значение λ_1 и соответствующий ему собственный вектор e_1 заданной матрицы с любой точностью. Найденные λ_1 и e_1 можно исключить из заданной матрицы, т. е. понизить порядок матрицы на единицу, и, вновь применив итерационный процесс (2.25), (2.26), найти λ_2 и e_2 . Эту процедуру можно продолжать до нахождения всего спектра собственных значений и соответствующих собственных векторов матрицы.

Пример 2.10. Найти наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с изложенным итерационным процессом зададим вектор $X^{(0)} = [1; 3]^*$, найдем его норму $\|X^{(0)}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ и проведем первую итерацию по (2.25), (2.26):

$$e_1^{(0)} = \frac{X^{(0)}}{\|X^{(0)}\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}} \right]^*;$$

$$X^{(1)} = A e_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{11}{\sqrt{10}} \end{bmatrix};$$

$$\lambda_{11} = (X^{(1)}, e_1^{(0)}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{11}{\sqrt{10}} \frac{3}{\sqrt{10}} = 3,4.$$

Вторая итерация:

$$\|X^{(1)}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{11}{\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{\frac{122}{10}};$$

$$e_1^{(1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{122}}; \frac{11}{\sqrt{122}} \right]^*;$$

$$X^{(2)} = A e_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{122}} \\ \frac{11}{\sqrt{122}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{122}} \\ \frac{35}{\sqrt{122}} \end{bmatrix};$$

$$\lambda_{12} = (X^{(2)}, e_1^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{122}} \frac{1}{\sqrt{122}} + \frac{35}{\sqrt{122}} \frac{11}{\sqrt{122}} = 3.16.$$

Третья итерация:

$$\|X^{(2)}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{122}}\right)^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{122}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1226}{122}};$$

$$e_1^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{122}} \frac{\sqrt{122}}{\sqrt{1226}}; \frac{35}{\sqrt{122}} \frac{\sqrt{122}}{\sqrt{1226}} \right]^* =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1226}}; \frac{35}{\sqrt{1226}} \right]^*;$$

$$X^{(3)} = A e_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1226}} \\ \frac{35}{\sqrt{1226}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1226}} \\ \frac{107}{\sqrt{1226}} \end{bmatrix};$$

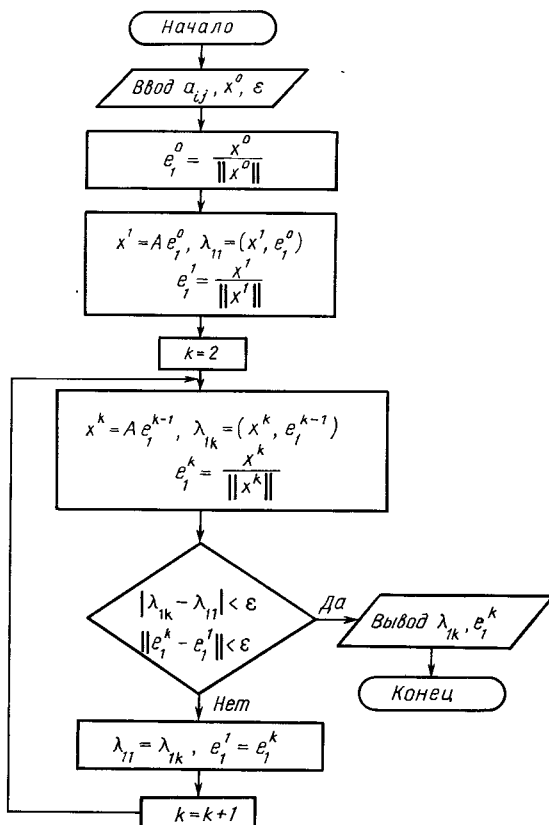


Рис. 2.7. Схема алгоритма итерационного процесса нахождения максимального по модулю собственного значения и собственного вектора матрицы

$$\lambda_{13} = (X^{(3)}, e_1^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{1226}} \frac{1}{\sqrt{1226}} + \frac{107}{\sqrt{1226}} \frac{35}{\sqrt{1226}} = 3,05.$$

После третьей итерации имеем наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_{13} = 3,05$ и соответствующий ему собственный вектор

$$e_1^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{1226}}; \frac{35}{\sqrt{1226}} \right]^* = [0,028; 0,999]^*.$$

Поскольку точные значения этих величин $\lambda_1 = 3$, $e_1 = [0; 1]^*$, сходимость итерационного процесса хорошая.

Изложенный итерационный метод имеет хорошую сходимость и допускает простую реализацию на ЭВМ. На рис. 2.7 представлена схема алгоритма итерационного процесса (2.25), (2.26).

2.4.3. Определение наибольшего и наименьшего собственных значений симметричной матрицы

Матрицы, симметричные относительно главной диагонали, часто встречаются при решении задач строительной механики. Например, матрицы коэффициентов систем канонических уравнений метода сил или метода перемещений (см. гл. 3) являются симметричными.

Для симметричной матрицы A итерационный метод можно применить для определения ее наибольшего и наименьшего собственных значений, т. е. $\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A)$ и $\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A)$. Все собственные значения $\lambda_i(A)$ действительны, а собственные векторы образуют ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Наибольшее по модулю собственное значение $\bar{\lambda}(A)$ матрицы A определяется с помощью итерационного процесса (2.25), (2.26).

Для определения $\max \lambda_i(A)$ и $\min \lambda_i(A)$ используется матрица

$$B = A - \bar{\lambda}(A)E, \quad (2.27)$$

где E — единичная матрица.

Наибольшее по модулю собственное значение $\bar{\lambda}(B)$ определяется с помощью того же итерационного процесса (2.25), (2.26).

При известных $\bar{\lambda}(A)$ и $\bar{\lambda}(B)$ наибольшее и наименьшее собственные значения заданной симметричной матрицы A определяют по следующей методике:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{\lambda}(A) > 0 \quad & \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A); \\ \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A) + \bar{\lambda}(B); \end{cases} \\ \text{при } \bar{\lambda}(A) < 0 \quad & \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A) + \bar{\lambda}(B); \\ \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Пример 2.11. Найти наибольшее и наименьшее собственные значения невырожденной симметричной матрицы порядка $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью итерационного процесса (2.25), (2.26) определяем наибольшее по модулю собственное значение $\bar{\lambda}(A) = 4,46$. По формуле (2.27) находим матрицу

$$B = A - \bar{\lambda}(A)E = \begin{bmatrix} -0,46 & 1 & 0 \\ 1 & -2,46 & 1 \\ 0 & 1 & -3,46 \end{bmatrix}.$$

Согласно (2.25), (2.26), определяем наибольшее по модулю собственное значение этой матрицы $\bar{\lambda}(B) = -4,16$.

По методике (2.28) находим наибольшее и наименьшее собственные значения заданной матрицы A . Поскольку $\bar{\lambda}(A) = 4,46 > 0$,

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A) = 4,46;$$

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i(A) = \bar{\lambda}(A) + \bar{\lambda}(B) = 4,46 - 4,16 = 0,30.$$

Третье собственное значение матрицы A можно определить по ее следу $\text{Sp } A$, используя свойство (2.23): $\text{Sp } A = 4 + 2 + 1 = 7$; $\lambda(A) = 7 - 4,46 - 0,30 = 2,24$. Окончательно имеем спектр заданной матрицы $\lambda_1 = 4,46$; $\lambda_2 = 2,24$; $\lambda_3 = 0,30$.

Проверку правильности нахождения спектра матрицы A проведем, используя соотношение (2.24). Находим $\det A = 3$; $\prod_{i=1}^3 \lambda_i = 4,46 \cdot 2,24 \cdot 0,3 = 3$. Следовательно, найденные собственные значения матрицы A удовлетворяют (2.24).

2.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

2.5.1. Метод простой итерации

Пусть требуется найти простой вещественный корень уравнения

$$f(x) = 0, \quad (2.29)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

Считается, что известен интервал $[a, b]$, в котором находится только один корень уравнения (2.29), и на концах этого интервала функция $f(x)$ имеет разные знаки. Уравнение (2.29) представим в виде $x = \varphi(x)$, а последовательные приближения к искомому корню находят по итерационной формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.30)$$

В качестве первого приближения x_1 к искомому корню (первая итерация) можно принять любое значение x на отрезке изоляции корня $[a, b]$. Если в окрестности искомого корня модуль производной $\varphi'(x)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, итерационный процесс (2.30) сходится, причем тем быстрее, чем меньше k .

Пример 2.12. Найти корень алгебраического уравнения $x^5 - x - 0,2 = 0$, лежащий в интервале $[1; 1,1]$.

Запишем данное уравнение в виде $x = \varphi(x) = \sqrt[5]{x+0,2}$. Условие сходимости метода в интервале $[1; 1,1]$ $|\varphi'(x)| = 5(x+0,2)^{-4/5} < 1/5$ выполнено. За начальное приближение примем $x_1 = 1$. Последовательно по формуле (2.30) находим:

$$x_2 = \sqrt[5]{1+0,2} = 1,0371; \quad x_3 = \sqrt[5]{1,0371+0,2} = 1,0440;$$

$$x_4 = \sqrt[5]{1,0440+0,2} = 1,0446; \quad \dots \quad x_7 = \sqrt[5]{1,0448+0,2} = 1,0448.$$

За приближенное значение искомого корня можно принять $x = 1,0448$.

Пример 2.13. Найти вещественный корень трансцендентного уравнения [26] $x - \sin x - 0,25 = 0$.

Представим это уравнение в виде $x = \varphi(x) = \sin x + 0,25$. Любым способом определяем отрезок изоляции искомого корня $[1,1; 1,3]$. Условие сходимости метода в этом интервале $|\varphi'(x)| = \cos x < 1$ выполнено. В качестве первого приближения принимаем $x_1 = 1,20$. Последовательно находим по формуле (2.30):

$$x_2 = \sin 1,20 + 0,25 = 0,932 + 0,25 = 1,182;$$

$$x_3 = \sin 1,182 + 0,25 = 0,925 + 0,25 = 1,175;$$

$$x_4 = \sin 1,175 + 0,25 = 0,923 + 0,25 = 1,173;$$

$$x_5 = \sin 1,172 + 0,25 = 0,922 + 0,25 = 1,172.$$

Приближенное значение искомого корня $x = 1,172$.

2.5.2. Метод Ньютона — Рафсона (метод касательных)

Уравнение $f(x) = 0$ можно привести к виду

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Тогда методом простой итерации (2.30) при условии $f'(x_n) \neq 0$ можно получить итерационную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.31)$$

За начальное приближение искомого корня принимают x_1 из промежутка изоляции корня, для которого $f(x_1)$ и $f''(x_1)$ имеют одинаковые знаки. При этом условии итерационный процесс (2.31) сходится.

Величина x_{n+1} в (2.31) является абсциссой точки пересечения с осью x касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_n . Отсюда происходит и другое, встречающееся иногда название метода — метод касательных.

Пример 2.14. Найти вещественный корень трансцендентного уравнения $x - 1,5 \cos x = 0$.

Задаем первое приближенное значение корня $x_1 = 0,92$ и уточняем его методом Ньютона — Рафсона. Функция $f(x)$ и ее производные: $f(x) = x - 1,5 \cos x$; $f'(x) = 1 + 1,5 \sin x$; $f''(x) = 1,5 \cos x$.

Проверяем условие сходимости итерационного процесса (2.31):

$$f(x_1) = 0,92 - 1,5 \cdot 0,6058 = 0,0113 > 0;$$

$$f''(x_1) = 1,5 \cdot 0,6058 = 0,9087 > 0.$$

Условие сходимости выполнено, так как значения функции $f(x)$ и ее второй производной положительны при $x_1=0,92$. Последовательно находим по формуле (2.31)

$$x_2=0,920-0,0113/2,190=0,9148; \quad x_3=0,9148-0,0001/2,189=0,9148.$$

Приближенное значение искомого корня $x=0,9148$.

2.5.3. Применение метода простой итерации к решению систем нелинейных уравнений

Решение системы нелинейных уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

представляет более сложную задачу, чем решение одного уравнения. Для нахождения решения этой системы методом простой итерации ее записывают в виде

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.33)$$

где φ_i — непрерывные функции, имеющие непрерывную первую производную в некоторой области G , содержащей вещественное решение $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ системы уравнений (2.32). Если решение единственное, а $x_i^{(0)}$ — числа, близкие к a_i , эти числа принимают за начальное приближение решения, а последовательные его приближения находят по итерационной формуле

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots). \quad (2.34)$$

Условия сходимости данного итерационного процесса и выбора вектора начального приближения решения $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ основаны на следующем понятии о расстоянии между векторами.

Если рассматривать $x_1, x_2, \dots, x_n$ как компоненты n -мерного вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, норму вектора X можно определить из равенства

$$\|X\| = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|,$$

а расстояние между векторами X' и X'' — из выражения

$$\rho(X', X'') = \|X' - X''\| = \max_{i=1,2,\dots,n} |x'_i - x''_i|.$$

Для сходимости решения системы (2.33) методом итерации достаточно выполнения условия

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.35)$$

где $M_{ij} = \max |\partial \varphi_i / \partial x_j|$, а за $X^{(0)}$ принимают любой вектор из малой окрестности $\rho(X, a)$.

Пример 2.15. Методом итерации найти положительные корни системы уравнений [26]

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0; \\ f_2(x, y) &\equiv x + 3 \lg x - y^2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Запишем эту систему в виде (2.33):

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y) = \left(\frac{1}{2} x(y+5) - \frac{1}{2} \right)^{1/2}; \\ y &= \varphi_2(x, y) = (x + 3 \lg x)^{1/2}. \end{aligned} \right\}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{4} (y+5) \left(\frac{1}{2} x(y+5) - \frac{1}{2} \right)^{-1/2};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3M}{x} \right) (x + 3 \lg x)^{-1/2};$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x(y+5) - \frac{1}{2} \right)^{-1/2}; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0,$$

где $M=0,43429$.

Находим любым способом, например графическим, приближенные значения положительных корней $x^{(0)}=3,5$; $y^{(0)}=2,2$, которые принимаем за начальное приближение решения.

Проверяем условие сходимости итерационного процесса по (2.35). Ограничиваясь малой окрестностью $\rho(|x-3,5|; |y-2,2|)$, где $|x-3,5| \leq 0,1$; $|y-2,2| \leq 0,1$, получим:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| < 0,54; \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| < 0,27; \quad \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| < 0,42; \quad \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = 0.$$

Отсюда следует, что условия (2.35)

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| = 0,96 < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = 0,27 < 1$$

выполняются и последовательные приближения решения не выйдут за пределы окрестности.

Табл. 2.1. Значения последовательных приближений $x^{(k)}, y^{(k)}$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	3,5	2,2
1	3,479	2,259
2	3,481	2,260
3	3,484	2,261
4	3,486	2,261
5	3,487	2,262
6	3,487	2,262

Последовательные приближения (табл. 2.1) находим по (2.34):

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{1}{2} x^{(k)}(y^{(k)}+5) - \frac{1}{2} \right)^{1/2};$$

$$y^{(k+1)} = (x^{(k)} + 3 \lg x^{(k)})^{1/2}.$$

За уточненное решение заданной системы уравнений принимаем $x=3,487$; $y=2,262$.

2.5.4. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Процесс решения системы нелинейных уравнений (2.32) методом Ньютона основан на использовании невырожденной матрицы Якоби для системы непрерывных функций $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_i(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})$, имеющих непрерывные производные первого порядка в некоторой выпуклой области G , содержащей решение $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ системы (2.32):

$$J(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

где $f_i(\mathbf{X}) \equiv f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Процесс нахождения решения системы (2.32) по методу Ньютона определяется следующей матричной формулой:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (2.36)$$

где $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)})$ — матрица, обратная матрице Якоби; $\mathbf{X}^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^*$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^*$ — матрицы-столбцы.

Метод Ньютона сходится, если в области G функции $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеют вторые производные, не превосходящие по абсолютной величине число L , а в точке $\mathbf{X}^{(0)} \in G$ матрица $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ не вырожденная и выполняется условие

$$h = M^2 L \delta n^2 \leq \frac{1}{2},$$

где $\delta \geq |f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \quad (i=1, 2, \dots, n)$;

$$M \geq \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(0)})\| = \max_i \sum_{j=1}^n |g_{ij}(\mathbf{X}^{(0)})|;$$

g_{ij} — элементы матрицы $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(0)})$.

Векторное равенство (2.36) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{X}^{(k)}) (\mathbf{X}_j^{(k+1)} - \mathbf{X}_j^{(k)}) = -f_i(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.37)$$

Более простым, но медленнее сходящимся является модифицированный метод Ньютона, в котором итерационный процесс опре-

деляется формулой

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

отличающейся от (2.36) тем, что обратная матрица $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^{(0)})$ определяется только один раз, а не на каждой итерации.

Пример 2.16. Уточнить методом Ньютона приближенные значения решения $x_0=0,4$; $y_0=0,9$ системы уравнений [3]

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0; \\ f_2(x, y) &\equiv 2x^2 + 3xy + y^2 - 3 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Для этого будем последовательно решать систему уравнений (2.37)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_k, y_k) \Delta x_k + \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_k, y_k) \Delta y_k &= -f_1(x_k, y_k); \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x_k, y_k) \Delta x_k + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_k, y_k) \Delta y_k &= -f_2(x_k, y_k), \end{aligned} \right\}$$

где $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$; $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$.

Для данного примера

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 8x + 2y; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x + 2y - 1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 4x + 3y; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3x + 2y. \end{aligned}$$

Исходя из начального приближения, на первой итерации находим x_1, y_1 :

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -0,73; \quad \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 5,0; \quad \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} = 1,6; \\ f_2(x_0, y_0) &= -0,79; \quad \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 4,3; \quad \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 3,0; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 5,0\Delta x_0 + 1,6\Delta y_0 &= 0,73; \\ 4,3\Delta x_0 + 3,0\Delta y_0 &= 0,79; \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta x_0 = 0,114; \quad x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0,514;$$

$$\Delta y_0 = 0,100; \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,000.$$

На второй итерации определяем x_2, y_2 :

$$f_1(x_1, y_1) = 0,084784; \quad \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial x} = 6,112; \quad \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y} = 2,028;$$

$$f_2(x_1, y_1) = 0,070392; \quad \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x} = 5,056; \quad \frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial y} = 3,542;$$

$$\left. \begin{aligned} 6,112\Delta x_1 + 2,028\Delta y_1 &= -0,084784; \\ 5,056\Delta x_1 + 3,542\Delta y_1 &= -0,070392; \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta x_1 = -0,013826; \quad \Delta y_1 = -0,000138; \quad x_2 = 0,500174; \quad y_2 = 0,999862.$$

На третьей итерации находим x_3, y_3 :

$$f_1(x_2, y_2) = 0,000768; \quad \frac{\partial f_1(x_2, y_2)}{\partial x} = 6,001116; \quad \frac{\partial f_1(x_2, y_2)}{\partial y} = 2,000072;$$

$$f_2(x_2, y_2) = 0,000387; \quad \frac{\partial f_2(x_2, y_2)}{\partial x} = 5,000282; \quad \frac{\partial f_2(x_2, y_2)}{\partial y} = 3,500246;$$

$$\begin{cases} 6,001116\Delta x_2 + 2,000072\Delta y_2 = -0,000768; \\ 5,000282\Delta x_2 + 3,500246\Delta y_2 = -0,000387; \end{cases}$$

$$\Delta x_2 = -0,000174; \Delta y_2 = 0,000138; x_3 = 0,5; y_3 = 1,0.$$

В качестве уточненного решения заданной системы нелинейных уравнений принимаем $x=0,5; y=1$.

2.5.5. Решение систем нелинейных уравнений методом наискорейшего спуска

Решение системы уравнений (2.32) можно свести к задаче отыскания минимумов функции

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.38)$$

Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ есть решение системы уравнений (2.32), то $f_i(\mathbf{a}) = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) и тогда $\Phi(\mathbf{a}) = 0$, а в других точках $\Phi(\mathbf{X}) > 0$. Таким образом, каждый нулевой минимум функции $\Phi(\mathbf{X})$ дает решение системы (2.32).

Метод наискорейшего спуска сводится к отысканию нулевых минимумов вспомогательной функции $\Phi(\mathbf{X})$ и заключается в следующем.

Известно, что градиент функции $\Phi(\mathbf{X})$, т. е. вектор

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial x_n} \right),$$

указывает направление максимального роста функции. Следовательно, в противоположном направлении скорость ее убывания также максимальна. Если $\mathbf{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ дает приближенное значение минимума функции $\Phi(\mathbf{X})$, то в направлении прямой $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} - \lambda \text{grad } \Phi(\mathbf{X})$ функция убывает с наибольшей скоростью.

Неизвестный параметр λ можно найти из условия минимума функции $\Phi(\mathbf{X}^{(0)} - \lambda \text{grad } \Phi(\mathbf{X}^{(0)}))$, как функции одной переменной λ . Пусть это будет λ_0 . Тогда переход от вектора $\mathbf{X}^{(0)}$ к вектору $\mathbf{X}^{(1)}$ осуществляется по формуле

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} - \lambda_0 \text{grad } \Phi(\mathbf{X}^{(0)}).$$

В общем случае переход от вектора $\mathbf{X}^{(k)}$ к вектору $\mathbf{X}^{(k+1)}$ осуществляется по итерационной формуле

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \lambda_k \text{grad } \Phi(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (2.39)$$

где λ_k — решение уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi(\mathbf{X}^{(k)} - \lambda \text{grad } \Phi(\mathbf{X}^{(k)})) = 0. \quad (2.40)$$

На каждом шаге этого итерационного процесса происходит движение в направлении быстрейшего убывания функции $\Phi(\mathbf{X})$.

Если начальное приближение $\mathbf{X}^{(0)}$ выбрано достаточно хорошо и в окрестности искомого решения $\mathbf{a}$ нет других минимумов, этот процесс быстро дает искомое решение с заданной точностью.

Для нахождения наименьшего положительного корня уравнения (2.40) можно предложить следующий прием. Считается, что λ — малая величина, квадратами и более высокими степенями которой можно пренебречь. Функцию (2.38) представляют в виде функции одной переменной λ , т. е.

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\mathbf{X}^{(k)} - \lambda \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)})) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{X}^{(k)} - \lambda \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)})).$$

Разложение функции f_i по степеням λ с точностью до линейных членов дает

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \left(f_i(\mathbf{X}^{(k)}) - \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)}) \right)^2,$$

$$\text{где } \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right);$$

Следовательно, уравнение (2.40) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda} = -2 \sum_{i=1}^n \left(f_i(\mathbf{X}^{(k)}) - \right. \\ \left. - \lambda \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)}) \right) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)}) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{X}^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x} \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)}) \right)^2}. \quad (2.41)$$

При этом вектор $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)})$ определяют исходя из выражения для производных

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(\mathbf{X}^{(k)}) \right) = 2 \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{X}^{(k)}) \frac{\partial f_i(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial x_j},$$

откуда $\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}^{(k)}) = 2\mathbf{J}^*(\mathbf{X}^{(k)})\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})$, где $\mathbf{J}^*(\mathbf{X}^{(k)})$ — транспонированная матрица Якоби.

Пример 2.17. Методом скорейшего спуска приближенно вычислить корни системы нелинейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x^2 + x - 2yz - 0,1 = 0; \\ f_2 &= y - y^2 + 3xz + 0,2 = 0; \\ f_3 &= z^2 + z + 2xy - 0,3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

расположенные в окрестности начала координат [26].

За начальное приближение принимаем вектор

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ откуда } F(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ -0,3 \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби заданной системы уравнений

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2x & -2z & -2y \\ 3z & 1-2y & 3x \\ 2y & 2x & 1+2z \end{bmatrix}$$

Подстановкой начального приближения получаем

$$\text{grad } \Phi(X^{(0)}) = 2J^*(X^{(0)})F(X^{(0)}) = 2 \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ -0,3 \end{bmatrix};$$

по формуле (2.41) находим $\lambda_0 = 0,5$, и по (2.39) — первое приближение

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \lambda_0 \text{grad } \Phi(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим:

$$F(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 = 0,1858;$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \lambda_1 \text{grad } \Phi(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0,0327 \\ -0,2007 \\ 0,2453 \end{bmatrix}.$$

Для контроля вычислим невязку:

$$F(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0,032 \\ -0,017 \\ -0,007 \end{bmatrix}.$$

Так как невязка решения мала, процесс можно остановить и за приближенное решение заданной системы уравнений принять $x = 0,0327$; $y = -0,2007$; $z = 0,2453$.

Применение метода наискорейшего спуска требует на каждом шаге большой вычислительной работы. Поэтому можно осуще-

ствлять движение из $\mathbf{X}^{(0)}$ не в направлении градиента $\Phi(\mathbf{X})$, а в направлении какого-либо другого вектора, не находящегося в плоскости, касательной к поверхности $\Phi(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}^{(0)})$. Проще всего в задачах строительной механики вести спуск в направлении координатных осей.

Метод покоординатного спуска (релаксационный метод) отличается от метода наискорейшего спуска тем, что в итерационном процессе участвуют не все компоненты вектора решения системы уравнений. Здесь вычисляют все частные производные $\partial\Phi(\mathbf{X}^{(0)})/\partial x_i$ и, если $\partial\Phi(\mathbf{X}^{(0)})/\partial x_j$ — наибольшая из них, $\mathbf{X}^{(1)}$ находят из условия $\mathbf{X}_k^{(1)} = \mathbf{X}_k^{(0)}$ при $k \neq j$, а при $k = j$

$$\mathbf{X}_j^{(1)} = \mathbf{X}_j^{(0)} - \lambda_0 \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}^{(0)})}{\partial x_j},$$

где λ_0 определяют из условия (2.40), которое принимает вид

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_j^{(0)} - \lambda \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}^{(0)})}{\partial x_j}, x_{j+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0.$$

Методы наискорейшего и покоординатного спуска ориентированы на применение ЭВМ и легко программируются.

3. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Широкое применение ЭВМ в расчете статически неопределимых стержневых систем способствовало развитию новых, матричных вариантов классических методов сил и перемещений, наиболее удобных для машинного счета. Дальнейшее их совершенствование привело к разработке метода конечных элементов (см. гл. 6), который используется для расчета не только стержневых, но и континуальных систем, какими являются пластинки и оболочки.

Матричные варианты классических методов строительной механики стержневых систем обычно излагают без привлечения понятия конечного элемента. Однако указанные методы можно рассматривать как частные случаи метода конечных элементов.

3.1. МЕТОД СИЛ

3.1.1. Применение метода сил к расчету плоских стержневых систем

В методе сил вместо заданной системы рассматривается *основная система*, т. е. статически определимая и геометрически неизменяемая стержневая система, которая образуется из заданной статически неопределимой системы в результате отбрасывания определенных связей, называемых лишними. Число лишних связей равно степени статической неопределимости n заданной системы.

Для плоской стержневой системы степень статической неопределимости выражается формулой $n = 3k - c$, где k — число замкнутых контуров в системе, а c — число связей, необходимых для полного защемления концов стержней во всех узлах, включая опорные. Основными неизвестными метода сил являются усилия в отброшенных лишних связях $X_1, X_2, \dots, X_n$. Число основных неизвестных, а следовательно, и порядок системы линейных алгебраических уравнений для их отыскания равны степени статической неопределимости заданной системы. Эти неизвестные находятся из условия эквивалентности основной и заданной систем. С этой целью для основной системы составляют уравнения совместности деформаций, физическая сущность которых состоит в том, что они отрицают наличие перемещений по направлению отброшенных связей в основной системе, что и делает, таким образом, основную систему эквивалентной заданной.

Пусть δ_{kj} — перемещения по направлению отброшенных связей

от единичных сил; X_k — основные неизвестные; δ_{kF} — перемещения по направлению отброшенных связей от внешней нагрузки. Тогда условие эквивалентности для первой отброшенной связи имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1F} = 0.$$

Аналогичные уравнения составляются для остальных $n-1$ отброшенных связей. В целом они формируют систему *канонических уравнений метода сил*.

Определение усилий от внешней нагрузки в матричном варианте метода сил производится по формуле

$$S_F = (b_0 - b_1(b_1^*fb_1)^{-1}(b_1^*fb_0))F, \quad (3.1)$$

где S_F — матрица усилий в расчетных сечениях элементов заданной системы от внешней нагрузки; b_0 — матрица усилий в расчетных сечениях элементов основной системы от единичных внешних сил; b_1 — то же от единичных значений основных неизвестных; b_1^* — транспонированная матрица b_1 ; f — квазидиагональная матрица податливости отдельных элементов (стержней); F — матрица нагрузок.

Матрица податливости f является квадратной размером $m \times m$, где m — число расчетных сечений. Она характеризует упругие свойства системы. При составлении этой матрицы заданную систему делят на отдельные элементы, для которых есть готовые матрицы податливости. Для прямолинейных стержней постоянного сечения матрицы податливости следующие:

для стержня с растягивающим усилием N_k (рис. 3.1, а) матрица податливости, связывающая удлинение u_k с усилием, имеет первый порядок:

$$c_a = \frac{l_k}{EA_k} [1], \quad (3.2)$$

где l_k — длина стержня; EA_k — жесткость стержня при растяжении; $[1]$ — матрица первого порядка;

для стержня с изгибающими моментами M_k^i и M_k^j в узлах i и j (рис. 3.1, б) матрица податливости, связывающая углы поворота φ_i и φ_j с упомянутыми моментами, имеет второй порядок:

$$c_b = \frac{l_k}{6EI_k} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

где EI_k — жесткость стержня при изгибе;

для стержня с одним изгибающим моментом M_k^i в узле i (рис. 3.1, в) матрица податливости имеет первый порядок:

$$c_v = \frac{l_k}{3EI_k} [1]. \quad (3.4)$$

Матрицы (3.2), (3.3) и (3.4) характеризуют упругие свойства стержней, изображенных на рис. 3.1. Однако в практике расчета встречаются криволинейные стержни переменного сечения с рас-

пределенной нагрузкой. Не всегда в таких случаях удастся получить зависимость между усилием и перемещением в замкнутом виде. Поэтому при определении перемещений прибегают к интегрированию с помощью формулы Симпсона. При этом отрезок интегрирования, как известно, разбивается на четное число m участков. В матричной форме формула Симпсона при определении перемещения, например Z_{1F} , примет вид

$$Z_{1F} = [b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_m^{(1)}] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{EI_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4\Delta x}{EI_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\Delta x}{EI_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta x}{EI_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0^{(F)} \\ b_1^{(F)} \\ b_2^{(F)} \\ \dots \\ b_m^{(F)} \end{bmatrix},$$

где $b_i^{(1)}$ — ординаты эпюры усилий в соответствующих сечениях участка интегрирования от единичной силы, приложенной по направлению перемещения; $b_i^{(F)}$ — то же от нагрузки на стержне; Δx — размер интервалов, на которые разбивается участок интегрирования.

Следует иметь в виду, что здесь средняя матрица не имеет того физического смысла, что приведенные выше матрицы подат-

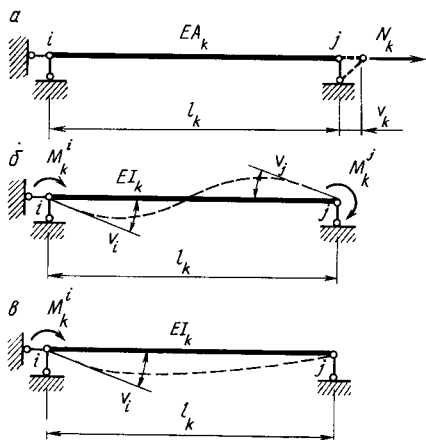


Рис. 3.1. Расчетные схемы стержней

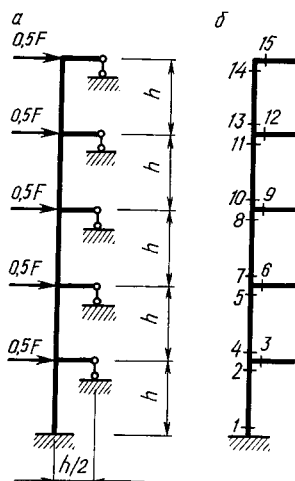


Рис. 3.2. Многоэтажная рама:
а — расчетная схема; б — основная система и нумерация расчетных сечений

ливости, а является лишь частью формулы Симпсона. Ее порядок определяется не числом независимых усилий, приложенных к стержню, а необходимой степенью точности интегрирования.

Например, в случае нагружения прямолинейного стержня

постоянного сечения равномерно распределенной нагрузкой для получения точного значения угла поворота концевое сечение достаточно участок интегрирования разделить на две части. Тогда для стержня длиной l и постоянной жесткости EI средняя матрица будет третьего порядка ($\Delta x = l/2$):

$$c = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

При использовании этой матрицы в середине стержня вводят дополнительное расчетное сечение, знак усилия в котором задают так же, как при определении перемещений по формуле Мора: если ординаты эпюры изгибающих моментов M_i и M_q находятся с одной и той же стороны оси стержня, знак принимается положительным.

Матрица усилий b_1 в расчетных сечениях при единичных значениях основных неизвестных имеет размер $m \times n$. Для составления этой матрицы следует построить эпюры усилий от $X_1=1$, $X_2=1, \dots, X_n=1$. Матрица усилий в расчетных сечениях от единичных внешних сил b_0 имеет размер $m \times i$, где i — число независимых сил. Если расчет производится для одного варианта нагружения, проще сразу построить эпюру усилий от заданных сил и составить матрицу S_F^0 размером $m \times 1$. Матрицы b_1 и b_0 характеризуют геометрическую схему конструкции.

Матрица нагрузок F имеет размер $i \times j$, где j — число вариантов нагружения. При одном варианте нагружения эту матрицу можно не составлять, а получить сразу матрицу $S_F^0 = b_0 F$ по эпюре усилий от внешних сил.

При одном варианте нагружения вместо обращения матрицы податливости проще решить систему уравнений

$$(b_1^* f b_1) X + (b_1^* f S_F^0) = 0. \quad (3.6)$$

Окончательные усилия определяют по формуле

$$S_F = S_F^0 + b_1 X.$$

Более подробно расчет стержневых систем в матричной форме изложен в книге [51].

Пример 3.1. Построить эпюры усилий в статически неопределимой раме, расчетная схема которой показана на рис. 3.2, а. Изгибная жесткость всех стержней одинакова ($EI = \text{const}$).

Степень статической неопределимости системы $n = 3 \cdot 5 - 10 = 5$. Основная система (рис. 3.2, б) образована из заданной путем отбрасывания лишних связей.

Для формирования матрицы податливости f основную систему делим на отдельные элементы (стойки и ригели). Расчетные сечения ($m = 15$) показаны на рис. 3.2, б. При составлении матрицы f используются матрицы (3.3) для стоек и (3.4) для ригелей:

$$f = \frac{h}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для составления матрицы b_1 размером $m \times n$ (15×5) вычисляем изгибающие моменты в стержнях при единичных значениях основных неизвестных. В качестве последних принимаем групповые неизвестные $X_1, X_2, \dots, X_5$ (рис. 3.3, а). В этом случае матрица коэффициентов будет ленточной трехчленной.

Поскольку предполагается только один вариант нагружения, по эпюре M_F^0 сразу получаем матрицу S_F^0 :

$$b_1 = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_F^0 = Fh \begin{bmatrix} -7,5 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1,5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

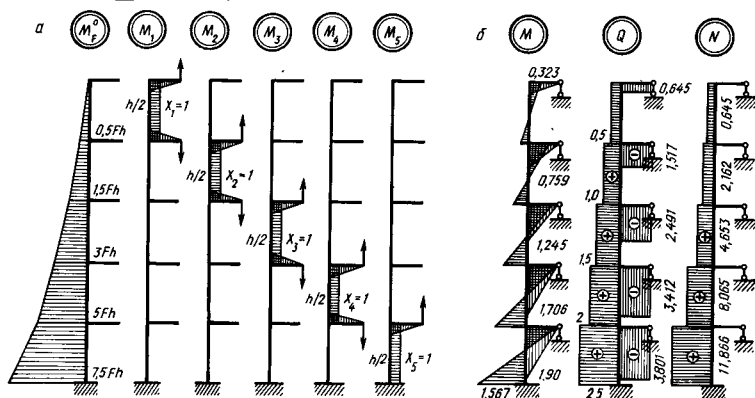


Рис. 3.3. Эпюры усилий в раме (см. рис. 3.2):

а — от внешней нагрузки и единичных сил в основной системе; б — от нагрузки в заданной системе

Далее используется выражение (3.6), где

$$b_1^* f b_1 = \frac{h^3}{24EI} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}; \quad b_1^* f S_F^0 = -\frac{Fh^3}{8EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений получилась трехчленной, которая решается методом прогонки (см. § 2.2.1).

Усилия в расчетных сечениях от заданной нагрузки определяем по формуле $S_F = S_F^0 + b_1 X$:

$$S_F = Fh \begin{bmatrix} -7,5 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1,5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,645 \\ 2,162 \\ 4,653 \\ 8,065 \\ 11,866 \end{bmatrix} F = Fh \begin{bmatrix} -1,567 \\ -0,933 \\ 1,901 \\ -0,968 \\ -1,033 \\ 1,706 \\ -0,674 \\ -0,827 \\ 1,245 \\ -0,419 \\ -0,581 \\ 0,759 \\ -0,178 \\ -0,323 \\ 0,323 \end{bmatrix}.$$

По этой матрице построена эпюра изгибающих моментов (рис. 3.3, б). У ординат общий множитель Fh . Ординаты эпюр поперечных и продольных сил имеют общий множитель F .

3.1.2. Применение метода сил к расчету пространственных стержневых систем

Применение матричного варианта метода сил к расчету статически неопределимых пространственных рам также основано на формуле (3.1). В этом случае при составлении матрицы податливости предполагается, что рама состоит из прямолинейных стержней постоянного сечения и их изгиб происходит в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, в которых находятся главные центральные оси инерции поперечных сечений стержней. Для одного такого стержня матрица податливости с учетом поперечных и продольных сил является квадратной матрицей шестого порядка:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI_y} + \frac{k_z}{GA} & -\frac{l}{6EI_y} + \frac{k_z}{GA} \\ 0 & -\frac{l}{6EI_y} + \frac{k_z}{GA} & \frac{l}{3EI_y} + \frac{k_z}{GA} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{3EI_z} + \frac{k_y}{GA} & -\frac{l}{6EI_z} + \frac{k_y}{GA} & 0 \\ -\frac{l}{6EI_z} + \frac{k_y}{GA} & \frac{l}{3EI_z} + \frac{k_y}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{GI_k} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где EI_y и EI_z — изгибные жесткости; GA и GI_k — жесткости стержня на сдвиг и кручение; k_y и k_z — коэффициенты формы поперечного сечения стержня для главных осей инерции y и z .

Пример 3.2. Определить усилия в расчетных сечениях трижды статически неопределимой пространственной рамы (рис. 3.4, а) без учета влияния на дефор-

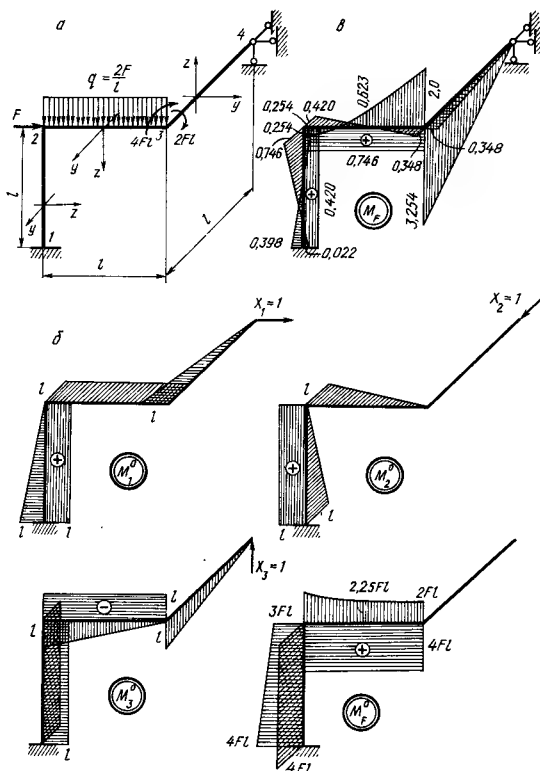


Рис. 3.4. Пространственная статически неопределимая рама:

а — заданная система; б — эпюры моментов в основной системе; в — в заданной системе от внешней нагрузки

мации стержней поперечных и продольных усилий. Жесткости EI_y, EI_z и GI_k — постоянные для всех стержней. Соотношение моментов инерции сечений: $I_z = 0,5I_y$, $(1+\nu)/I_k = I_y/12$, где ν — коэффициент Пуассона.

Основная система (рис. 3.4, б) образована за счет удаления шаровой неподвижной опоры 4.

Для составления матрицы f выделим в раме три элемента. Для элемента 1 — 2 исключим из матрицы (3.7) первый столбец и первую строку. Поскольку на стержень 2 — 3 действует распределенная нагрузка, изгибающая его в плоскости, перпендикулярной к оси y , в сокращенной матрице (3.7) первый блок второго порядка заменим матрицей (3.5) третьего порядка. Для стержня 3 — 4 из (3.7) используем только вторые и четвертые строки и столбцы, так как при заданных граничных условиях изгибающие и крутящий моменты на конце стержня в узле 4 будут равны нулю. Матрица податливости

$$f = \frac{l}{6EI_y} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Для составления матриц b_1 и S_F^0 строим эпюры моментов (рис. 3.4, б). Ординаты крутящих моментов выделены на рисунке штриховкой вдоль оси стержня. По эпюрам $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_F^0$ составим матрицы усилий, используя то же правило знаков, что и для плоских систем:

$$b_1 = l \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_F^0 = Fl \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ -2,25 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Дальнейший расчет заключается в выполнении последовательности матричных операций, представленных формулой (3.1):

$$b_1^* = l \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b_1^* f = \frac{l^2}{6EI_y} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = b_1^* f b_1 = \frac{l^3}{6EI_y} \begin{bmatrix} 19 & 7 & -3 \\ 7 & 9 & 6 \\ -3 & 6 & 23 \end{bmatrix};$$

определение свободных членов

$$b_{if}^0 S_F^0 = \frac{Fl^3}{6EI_y} \begin{bmatrix} 11 \\ -24 \\ -80,5 \end{bmatrix};$$

решение системы уравнений

$$\begin{aligned} 19X_1 + 7X_2 - 3X_3 + 11F &= 0; \\ 7X_1 + 9X_2 + 6X_3 - 24F &= 0; \\ 3X_1 + 6X_2 + 23X_3 - 80,5F &= 0; \end{aligned} \quad X = \begin{bmatrix} -0,3479 \\ 0,7675 \\ 3,2544 \end{bmatrix} F;$$

определение усилий в расчетных сечениях статически неопределимой рамы от заданной нагрузки

$$S_F = S^0 + b_1 X = \begin{bmatrix} -0,3977 \\ -0,2544 \\ 0,0219 \\ 0,7456 \\ 0,4196 \\ 0,2544 \\ -0,6228 \\ 2,0 \\ -0,4196 \\ -0,3479 \\ 0,7456 \\ 3,2544 \\ 0,3479 \end{bmatrix} Fl.$$

Эпюра изгибающих моментов M_F в заданной системе приведена на рис. 3.4, а, где ординаты следует умножить на Fl .

Для реализации изложенной процедуры расчета на ЭВМ можно использовать стандартные программы матричных операций.

3.2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

3.2.1. Основы метода перемещений

Метод перемещений является вторым классическим методом расчета статически неопределимых систем. Метод имеет формальное сходство с методом сил. Так же выбирается основная система и составляется условие ее эквивалентности с заданной системой, хотя число основных неизвестных этого метода от степени статической неопределимости заданной системы не зависит.

Здесь основную систему получают не удалением, а добавлением новых связей, препятствующих угловой и линейной подвижности узлов. Числом этих связей и определяется число неизвестных метода перемещений, каковыми являются углы поворота жестких узлов и независимые линейные смещения всех узлов системы. Число неизвестных метода перемещений носит условный характер и зависит от принятых допущений и некоторой предварительной информации, получаемой, как правило, с помощью метода сил.

При расчете рамных систем, состоящих из прямолинейных стержней и имеющих как жесткие, так и шарнирные узлы, для получения основной системы метода перемещений при общепри-

нятых допущениях необходимо ввести следующие дополнительные связи: угловые связи, препятствующие повороту узлов, в те из них, где нет полных шарниров; линейные связи, препятствующие линейным смещениям узлов системы.

Степень линейной подвижности узлов определяется из шарнирной схемы. Последняя получается из заданной путем введения полных шарниров во все жесткие узлы (опорные и неопорные).

Затем в основной системе задают единичные перемещения по направлению поставленных связей и определяют последовательно от них и от внешней нагрузки реакции в этих связях. Если обозначить эти реакции через r_{kj} , а неизвестные перемещения по направлению добавленных связей через Z_k , суммарная реакция в первой добавленной связи в системе с n неизвестными перемещениями будет равна $r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1F}$, где r_{1F} — реакция в первой связи от внешней нагрузки. Реакции определяют по таблицам, составленным с привлечением метода сил (прил. 1).

Чтобы основная система была эквивалентна заданной, составляют уравнения равновесия, которые отрицают наличие реакций в добавленных связях. Например, для первой связи это уравнение имеет вид

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1F} = 0.$$

Такие же уравнения составляют для других добавленных связей, что в целом дает систему *канонических уравнений метода перемещений*.

После решения системы уравнений при определении усилий используется принцип независимости действия сил. Так, изгибающие моменты определяются выражением

$$M_F = M_1Z_1 + M_2Z_2 + \dots + M_nZ_n + M_F^0,$$

где M_k — ординаты эпюры в основной системе при единичных значениях перемещений Z_k ; M_F^0 — то же от внешней нагрузки.

Поперечные силы вычисляют по значениям изгибающих моментов, а продольные силы — по значениям поперечных сил с помощью уравнений равновесия.

3.2.2. Матричный вариант метода перемещений

При расчете статически неопределимых систем методом перемещений в матричной форме усилия в расчетных сечениях определяют по формуле

$$S_F = S_F^0 - k a (a^* k a)^{-1} R_0, \quad (3.8)$$

записанной через исходные матрицы k , a , R_0 , S_F^0 , которые составляют для основной системы, являющейся кинематически определенной при принятых допущениях. Здесь k — квазидиагональная матрица жесткости не объединенных между собой элементов; a — матрица углов поворота сечений на концах стержней от единич-

ных перемещений по направлению дополнительных связей; R_0 — матрица свободных членов, которые представляют собой реакции в дополнительных связях, зависящие от внешних воздействий на заданную систему; S_F^0 — матрица усилий в расчетных сечениях основной системы от внешней нагрузки.

Матрица жесткости k характеризует упругие свойства системы. Ее размер $m \times m$, где m — число расчетных сечений. Для получения матрицы k систему нужно разделить на элементы (стержни), матрицы жесткости которых известны. Для стержней, изображенных на рис. 3.1, эти матрицы имеют вид:

$$r_a = \frac{EA_k}{l_k} [1]; \quad (3.9)$$

$$r_b = \frac{2EI_k}{l_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (3.10)$$

$$r_c = \frac{3EI_k}{l_k} [1]. \quad (3.11)$$

Между этими матрицами жесткости и матрицами податливости метода сил (3.2) — (3.4) имеется зависимость $r_k = c_k^{-1}$.

Матрица углов поворота a характеризует геометрическую схему конструкции и имеет размер $m \times n$, где n — число неизвестных перемещений. Для составления этой матрицы в общем случае последовательно изображают схемы деформирования основной системы при $Z_k = 1$.

Матрица свободных членов R_0 имеет размер $n \times j$, где j — количество вариантов нагружения. Элементы этой матрицы определяют, как при обычном расчете, после построения эпюры M_F^0 по таблице реакций (прил. 1). При этом используется следующее правило знаков: реакция положительна, если ее направление совпадает с направлением задаваемого единичного перемещения.

Реакции в угловых связях от внешней нагрузки находят из уравнений равновесия для каждого узла. При вычислении реакций в линейных связях в общем случае поступают следующим образом: заданную нагрузку заменяют узловыми сосредоточенными силами (они равны реакциям, определяемым по прил. 1), а основную систему делают шарнирной. В результате получают статически определимую и геометрически неизменяемую шарнирную ферму, нагруженную в узлах. Усилия в стержнях фермы могут быть определены любым известным способом. В частности, можно использовать кинематический способ, так как требуемые при этом неполярные планы скоростей должны быть уже построены при получении элементов матрицы a .

Матрица S_F^0 усилий в расчетных сечениях основной системы от внешней нагрузки имеет размер $m \times j$. Ее составляют по эпюре M_F^0 для каждого варианта нагружения.

Как и в случае метода сил, иногда оказывается проще решить систему уравнений

$$(a^*ka)Z + R_0 = 0.$$

В этом случае усилия в сечениях элементов заданной системы определяют по формуле

$$S_F = S_F^0 + kaZ.$$

Пример 3.3. Определить методом перемещений изгибающие моменты в раме (рис. 3.5, а) со стержнями постоянной жесткости при изгибе ($EI = \text{const}$). Степень кинематической неопределимости рамы при общепринятых допущениях $n = 2$.

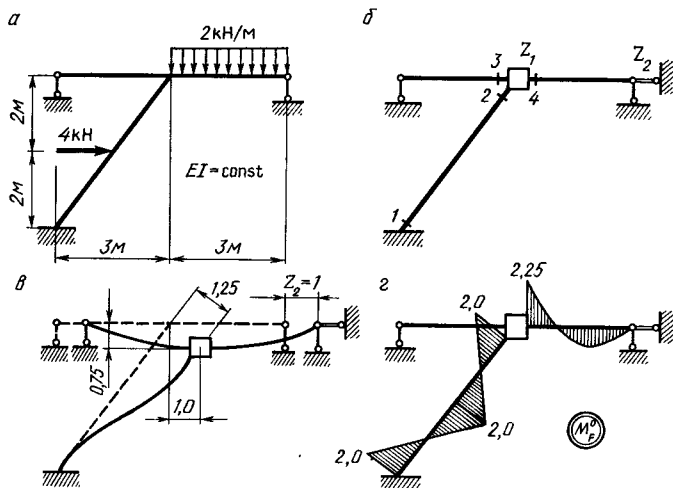


Рис. 3.5. К расчету рамы методом перемещений:

а — заданная система; б — основная система; в — схема деформирования при $Z_2 = 1$; з — эпюра изгибающих моментов от нагрузки в основной системе

Разделим раму на три элемента по числу стержней. Матрицу жесткости стержня 1—2 принимаем по (3.10), а остальных двух стержней — по (3.11):

$$k = EI \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При составлении матрицы a рекомендуется строить схемы деформирования основной системы при единичных перемещениях по направлению дополнительных связей. Схема деформирования при $Z_1 = 1$ проста, поэтому она здесь не приводится. Схема деформирования при $Z_2 = 1$ показана на рис. 3.5, в. На основании этой схемы составляем матрицу

$$a = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & -0,25 \\ 1 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Матрицу свободных членов составим по эпюре, изображенной на рис. 3.5, *г*, которая построена по прил. 1 (два варианта нагружения объединены на одном рисунке). Реакции в угловой связи вычисляются достаточно просто. Для вычисления реакций в линейной связи используем неполярный план скоростей, приведенный на рис. 3.5, *в*:

$$r_{2F} \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 1,25 \cdot 0,8 = 0; \quad r_{2F} = -2 \text{ кН};$$

$$r_{2q} \cdot 1 + 3,75 \cdot 0,75 = 0; \quad r_{2q} = -2,8125 \text{ кН}.$$

Матрица R_0 имеет вид

$$R_0 = \begin{bmatrix} 2 & -2,25 \\ -2 & -2,8125 \end{bmatrix}.$$

По эпюре M_F^0 (см. рис. 3.5, *г*) составляем матрицу

$$S_F^0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2,25 \end{bmatrix}$$

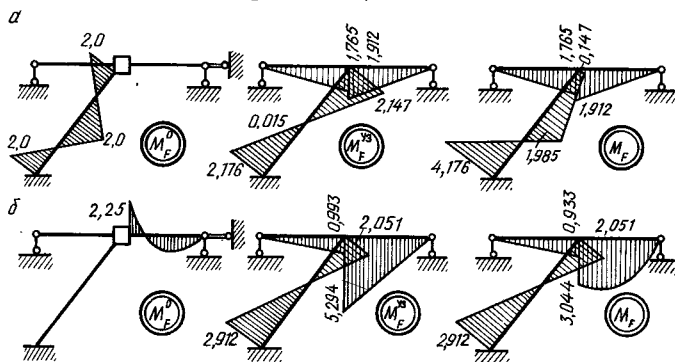


Рис. 3.6. Построение эпюр изгибающих моментов в раме (см. рис. 3.5):
а — при сосредоточенной нагрузке; *б* — при распределенной

Подставим полученные матрицы в (3.8) и выполним указанные операции. В результате получим матрицу усилий (моментов) в расчетных сечениях по концам стержней

$$S = \begin{bmatrix} -4,176 & -2,912 \\ -0,147 & -2,051 \\ -1,765 & -0,993 \\ 1,912 & 3,044 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3.6 показаны эпюры M_F^{y3} , построенные по матрице S , эпюры M_F^0 и окончательные эпюры M_F (в килоньютон-метрах). Для реализации изложенной процедуры расчета на ЭВМ достаточно использовать стандартные программы матричных операций.

3.3. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

3.3.1. Определение частот и форм свободных колебаний

Рассматриваются стержневые системы, в которых распределенная масса сосредоточена в отдельных сечениях, т. е. системы с

конечным числом степеней свободы. Их расчет удобно вести методом сил в матричной форме на ЭВМ с использованием стандартных программ.

При определении частот свободных колебаний в заданной системе последовательно определяют перемещения от единичных сил, приложенных по направлениям колебаний масс, и строят матрицу податливости системы

$$B = b_0^* f b,$$

где f — матрица податливости необъединенных элементов, размером $m \times m$; m — число расчетных сечений; b — матрица усилий от единичных сил, приложенных по направлению колебаний масс в заданной системе, размером $m \times n$, где n — число степеней свободы; b_0 — то же, построенная для любой статически определимой системы, полученной из заданной.

Если заданная система статически определима, $b_0 = b$. Не будет ошибкой и использование только матрицы b , но при этом несколько увеличивается трудоемкость вычислений.

Далее составляют диагональную матрицу масс M , вычисляют произведение матриц $D = BM$ и составляют систему однородных уравнений

$$(BM - \lambda E)X = 0 \quad (3.12)$$

или $DX = \lambda X$, где $\lambda = 1/\omega^2$; ω — частота свободных колебаний заданной системы; E — единичная матрица; X — вектор амплитуд перемещений.

Так как при колебаниях $X \neq 0$, определитель

$$|BM - \lambda E| = 0. \quad (3.13)$$

Раскрытие этого определителя и вычисление собственных значений матрицы D и соответствующих им собственных векторов выполняются с помощью стандартных программ на ЭВМ.

Матрицы B и M в (3.12) являются симметричными. Однако их произведение D будет несимметричной матрицей, если сосредоточенные массы различные. В том случае, когда для нахождения собственных значений λ имеются программы только для симметричных матриц, используют известные методы приведения матриц к симметричному виду [26]. Общие вопросы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц изложены в гл. 2.

Пример 3.4. Определить частоты и соответствующие им формы свободных колебаний статически неопределимой рамы (рис. 3.7, а) с двумя сосредоточенными массами $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ и одинаковыми жесткостями стержней при изгибе ($EI = \text{const}$).

Вычислим элементы матрицы податливости B заданной системы с двумя степенями свободы. Система один раз статически неопределима и один раз кинематически неопределима, поэтому одним из методов (методом сил или методом перемещений) произведем статический расчет и построим эпюры изгибающих моментов M_1 и M_2 от единичных сил, приложенных по направлению колебаний масс (рис. 3.7, б). С целью упрощения вычислений интегралов Мора по способу Верещагина построим эпюры от тех же единичных сил в статически определимой системе (рис. 3.7, в) и найдем перемещения:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1^0}{EI} dx = \frac{1,708}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2^0}{EI} dx = -\frac{0,482}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2^0}{EI} dx = \frac{0,905}{EI}.$$

По этим значениям составляем матрицу податливости

$$B = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 1,708 & -0,482 \\ -0,482 & 0,905 \end{bmatrix}.$$

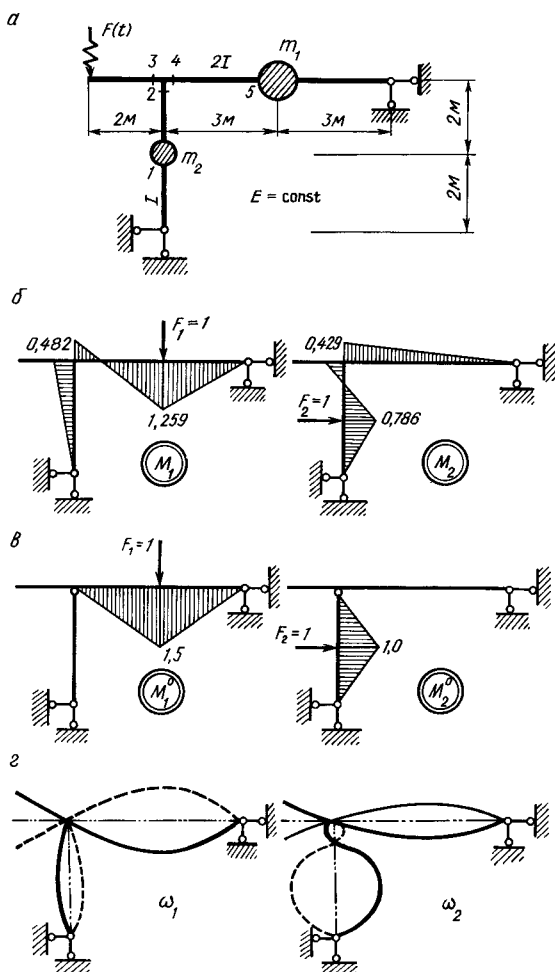


Рис. 3.7. Стержневая система с двумя степенями свободы:

a — заданная система; *б* — эпюры изгибающих моментов от единичных сил в заданной системе; *в* — в основной статически определимой системе; *г* — главные формы свободных колебаний

Матрица масс — диагональная:

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составим определитель (3.13):

$$|\mathbf{BM} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3,416 \frac{m}{EI} - \lambda_1 & -0,482 \frac{m}{EI} \\ -0,964 \frac{m}{EI} & 0,905 \frac{m}{EI} - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим квадратное уравнение

$$\lambda_j^2 - 4,321 \frac{m}{EI} \lambda_j + 2,627 \left(\frac{m}{EI} \right)^2 = 0,$$

корни которого будут $\lambda_1 = 3,5891 m/(EI)$; $\lambda_2 = 0,7319 m/(EI)$.

Отсюда находим частоты свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = \sqrt{1/\lambda_1} = 0,5278 \sqrt{EI/m}; \quad \omega_2 = \sqrt{1/\lambda_2} = 1,1689 \sqrt{EI/m}.$$

Для определения соответствующих форм колебаний используем уравнения (3.12). Так как эти уравнения однородные, зададим одно из их решений. Примем, например, что $X_1 = 1$. Из первого уравнения найдем X_2 для каждого значения λ_j :

$$(3,416m/(EI) - 3,5891m/(EI)) \cdot 1 - (0,482m/(EI)) X_2^{(1)} = 0;$$

$$(3,416m/(EI) - 0,7319m/(EI)) \cdot 1 - (0,482m/(EI)) X_2^{(2)} = 0.$$

Решив отдельно каждое из этих уравнений, запишем собственные векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,359 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5,569 \end{bmatrix}.$$

Формы колебаний показаны на рис. 3.7, з.

3.3.2. Расчет на вибрационную нагрузку

Расчет стержневых систем с конечным числом степеней свободы на вибрационную нагрузку в процессе стационарного гармонического воздействия типа $F_i(t) = F_i \sin \theta t$, где θ — частота вынужденного воздействия, сводится к определению амплитудных значений сил инерции J_i из матричного уравнения

$$\mathbf{B}^0 \mathbf{J} + \mathbf{C}_F = 0, \quad (3.14)$$

где матрица $\mathbf{B}^0 = \mathbf{B} - (1/(m_i \theta^2)) \mathbf{E}$; $\mathbf{B}$ — матрица податливости стержневой системы; $\mathbf{E}$ — единичная матрица; m_i — сосредоточенные массы; $\mathbf{J}$ — матрица-столбец сил инерции; $\mathbf{C}_F$ — матрица свободных членов, определяемая формулой

$$\mathbf{C}_F = \mathbf{b}^* \mathbf{f} \mathbf{S}_F^0; \quad (3.15)$$

$\mathbf{S}_F^0$ — матрица, построенная по эпюре моментов, возникающих при F_i (амплитудных значениях сил) в любой статически определенной системе, полученной из заданной.

Силы инерции определяют из уравнения (3.14):

$$J = -(B^0)^{-1} C_F.$$

Для обращения матрицы или решения системы уравнений (3.14) используются стандартные программы для ЭВМ.

Определение амплитудных значений усилий при $\sin \theta t = 1$ от заданной нагрузки производят по формуле

$$S = S_F + bJ, \quad (3.16)$$

где матрицы S_F и b составляют по эпюрам усилий, построенным для заданной системы.

Пример 3.5. Определить ординаты и построить эпюру изгибающих моментов в раме (см. рис. 3.7, а), загруженной вибрационной нагрузкой $F(t) = 4 \sin \theta t$ при $\theta = 0,8\omega_{\min}$, где $\omega_{\min}$ — наименьшая частота собственных колебаний рамы. Из предыдущего примера $\omega_{\min} = 0,5278 \sqrt{EI/m}$.

Ординаты эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки будем определять для моментов времени, когда $\sin \theta t = 1$.

Для составления матрицы B^0 используем матрицу податливости, полученную в примере 3.4, и откорректируем элементы ее главной диагонали. Для этой цели вычислим дополнительные члены при $\theta = 0,8\omega_1 = 0,422 \sqrt{EI/m}$:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{1,708}{EI} - \frac{m}{2m(0,422)^2 EI} = -\frac{1,0997}{EI};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{0,905}{EI} - \frac{m}{m(0,422)^2 EI} = -\frac{4,7103}{EI}.$$

Матрица B^0 имеет вид

$$B^0 = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -1,0997 & -0,482 \\ -0,482 & -4,7103 \end{bmatrix}.$$

Матрицу свободных членов C_F составляем по (3.15), предварительно построив эпюру изгибающих моментов в заданной системе при амплитудном значении статической нагрузки (рис. 3.8, а). Элементы матрицы C_F вычисляем с помощью интеграла Мора:

$$\delta_{1F} = \int_l \frac{M_F^c M_1^0}{EI} dx = -\frac{1}{2} 1,5 \cdot 6 \frac{1}{2} 4,571 \frac{1}{2EI} = -\frac{5,142}{EI};$$

$$\delta_{2F} = \int_l \frac{M_F^c M_2^0}{EI} dx = \frac{1}{2} 1 \cdot 4 \frac{1}{2} 3,429 \frac{1}{EI} = \frac{3,429}{EI}.$$

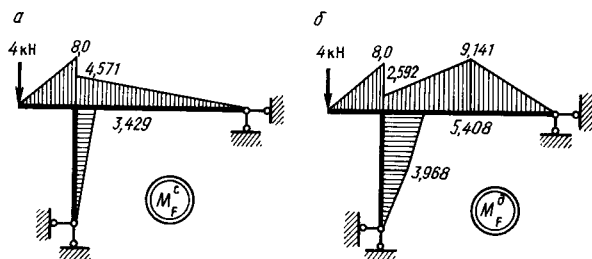


Рис. 3.8. Изгибающие моменты в раме (см. рис. 3.7, а):
а — при статическом нагружении; б — при динамическом

Матрица-столбец свободных членов C_F принимает вид

$$C_F = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -5,142 \\ 3,429 \end{bmatrix}.$$

Запишем матричное уравнение (3.14), отбросив общий множитель $1/(EI)$:

$$\begin{bmatrix} -1,0997 & -0,482 \\ -0,482 & -4,7103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5,142 \\ 3,429 \end{bmatrix} = 0,$$

решая которое, получаем: $J_1 = -5,2294$; $J_2 = 1,2631$.

Значения изгибающих моментов от динамической нагрузки в расчетных сечениях (см. рис. 3.7, а) определяем по формуле (3.16):

$$S = \begin{bmatrix} 1,715 \\ 3,429 \\ 8,000 \\ 4,571 \\ 2,286 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,241 & 0,786 \\ -0,482 & -0,429 \\ 0 & 0 \\ 0,482 & 0,429 \\ -1,259 & 0,215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5,2294 \\ 1,2631 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,968 \\ 5,408 \\ 8,000 \\ 2,592 \\ 9,141 \end{bmatrix}.$$

По этой матрице на рис. 3.8, б построена эпюра изгибающих моментов (в килоньютон-метрах) при динамической нагрузке для момента времени, когда $\sin \theta t = 1$.

Существенное отличие этой эпюры от эпюры при статической нагрузке объясняется небольшой разницей между частотой возбуждения θ и частотой собственных колебаний системы, что говорит об относительной близости ее к резонансу.

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Многие задачи строительной механики, например задачи изгиба стержней или балок, лежащих на упругом основании, задачи расчета оболочек вращения и многие другие, сводятся к решению начальных или краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Кроме того, при решении задач динамики пластин и оболочек методом Власова — Канторовича исходная смешанная задача для уравнений в частных производных сводится к начальной задаче по временной координате. Начальная задача является более простой по сравнению с краевой, поэтому разработаны методы сведения краевой задачи к начальной, для решения которой имеются простые и эффективные методы.

4.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

4.1.1. Метод Эйлера

Пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (4.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (4.2)$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ в рассматриваемой области D , содержащей точку (x_0, y_0) , имеет непрерывные частные производные $\partial f / \partial x$ и $\partial f / \partial y$ до некоторого порядка m , и решение задачи (4.1), (4.2) существует на всем заданном отрезке $[x_0, a]$.

Отрезок интегрирования $[x_0, a]$ разбивается на n одинаковых участков длиной h , и вводятся обозначения:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n).$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения начальной задачи (4.1), (4.2), которую называют *задачей Коши*. Суть метода заключается в том, что приближенные значения искомой функции $y(x)$ находят последовательно по формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = hf(x_i, y_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$ заменяется ломаной $M_0, M_1, M_2, \dots$ (рис. 4.1), называемой ломаной Эйлера,

звенья $M_i - M_{i+1}$ в точке M_i имеют направления, совпадающие с направлениями производных $y'_i = f(x_i, y_i)$.

Метод Эйлера прост, но имеет малую точность. Погрешность метода на каждом шаге имеет порядок $O(h^2)$, т. е. метод первого порядка точности, поэтому при его использовании необходимо принимать малый шаг h .

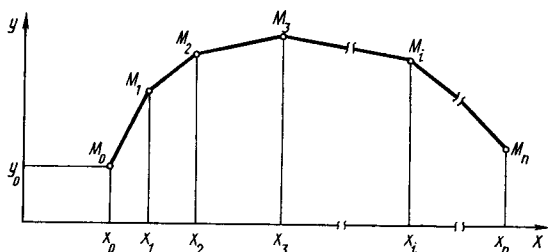


Рис. 4.1. Представление интегральной кривой $y=y(x)$ в виде ломаной Эйлера

Более точным является усовершенствованный метод Эйлера, в котором вначале вычисляется $k_1 = hf(x_i, y_i)$, а затем

$$\Delta y_i = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2). \quad (4.4)$$

Этот метод дает на каждом шаге погрешность порядка $O(h^3)$, т. е. имеет второй порядок точности.

4.1.2. Метод Рунге — Кутта

Наиболее распространенным методом решения начальных задач типа (4.1), (4.2) является метод Рунге — Кутта. Основная схема этого метода имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (4.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2); \\ k_3^{(i)} &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2); \quad k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.6)$$

Погрешность приведенной схемы метода Рунге — Кутта на каждом шаге имеет порядок $O(h^5)$.

Кроме схемы (4.5), (4.6) четвертого порядка точности, метод Рунге — Кутта имеет и другие схемы. Так, например, одна из схем второго порядка точности имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = \frac{1}{2} (k_1 + k_2),$$

где $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$ (индекс i при k_1 , k_2 здесь и далее опущен).

Другая схема второго порядка точности совпадает с усовершенствованным методом Эйлера по (4.4).

Пример 4.1. Найти приближенное решение методом Рунге — Кутта следующей начальной задачи [54] на отрезке $[0; 0,6]$: $y' = x^2 + y^2$ при $y(0) = 0$.

В соответствии со схемой (4.5), (4.6) покажем начало процесса ($i=0$) при шаге $h=0,1$:

$$k_1^{(0)} = 0,1 (0,0) = 0; \quad k_2^{(0)} = 0,1 (0,05^2 + 0,0) = 0,00025;$$

$$k_3^{(0)} = 0,1 (0,05^2 + 0,000125^2) = 0,00025; \quad k_4^{(0)} = 0,1 (0,10^2 + 0,00025^2) = 0,001.$$

Вычисляем по (4.5)

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0 + 2 \cdot 0,00025 + 2 \cdot 0,00025 + 0,001) = 0,000333;$$

$$y_1 = 0 + 0,000333 = 0,000333; \quad x_1 = 0,1.$$

Продолжая процесс до $i=5$, получаем:

$$y_5 = 0,041791; \quad x_5 = 0,5; \quad k_1^{(5)} = 0,1 (0,5^2 + 0,041791^2) = 0,025175;$$

$$k_2^{(5)} = 0,1 (0,55^2 + 0,054378^2) = 0,030546; \quad k_3^{(5)} = 0,1 (0,55^2 + 0,057064^2) = 0,030576;$$

$$k_4^{(5)} = 0,1 (0,60^2 + 0,072367^2) = 0,036524.$$

Вычисляем по (4.5)

$$\Delta y_5 = \frac{1}{6} (0,025175 + 2 \cdot 0,030546 + 2 \cdot 0,030576 + 0,036524) = 0,030657$$

и получаем окончательный результат $y_6 = 0,041791 + 0,030657 = 0,072448$.

Решение этой задачи аналитическим методом приводит к выражению

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7,$$

которое при $x=0,6$ дает результат $y(x)=0,07244$, совпадающий с приближенным значением y_6 , полученным методом Рунге — Кутта.

4.1.3. Применение метода Рунге — Кутта для приближенного решения систем дифференциальных уравнений

Пусть даны система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y) \quad (4.7)$$

и начальные условия

$$Y(x_0) = Y_0, \quad (4.8)$$

где $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^*$, $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^*$ — матрицы-столбцы искомых функций $y_i(x)$ и правых частей системы уравнений $f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Индекс «звездочка» означает знак транспонирования матрицы.

Приближенное решение начальной задачи (4.7), (4.8) методом Рунге — Кутта с использованием схемы четвертого порядка точности

находят в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i; \quad \Delta Y_i = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (4.9)$$

где $Y_i = Y(x_i)$, $(i=0, 1, 2, \dots)$, а матрицы-столбцы K_m определяются формулами

$$K_1 = hF(x_i, Y_i); \quad K_2 = hF(x_i + h/2, Y_i + K_1/2);$$

$$K_3 = hF(x_i + h/2, Y_i + K_2/2); \quad K_4 = hF(x_i + h, Y_i + K_3).$$

Например, для системы двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= \varphi(x, y, z), \\ z'(x) &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ процесс нахождения решения $y(x)$, $z(x)$ на i -м шаге сводится к следующим операциям.

При заданных или найденных значениях h , x_i , y_i , z_i вычисляют последовательно

$$k_1 = h\varphi(x_i, y_i, z_i); \quad m_1 = h\psi(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2 = h\varphi(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + m_1/2);$$

$$m_2 = h\psi(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + m_1/2);$$

$$k_3 = h\varphi(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + m_2/2);$$

$$m_3 = h\psi(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + m_2/2);$$

$$k_4 = h\varphi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3);$$

$$m_4 = h\psi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3).$$

Затем находят Δy_i и Δz_i по формулам

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \quad \Delta z_i = \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).$$

Значения $y(x)$ и $z(x)$ на шаге $i+1$ определяются выражениями: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$.

Пример 4.2. Найти методом Рунге — Кутты приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения свободных колебаний маятника в среде, обладающей сопротивлением [25]. Пусть θ — угол отклонения маятника от положения равновесия (рис. 4.2), t — время. Полагая, что сопротивление среды R пропорционально угловой скорости

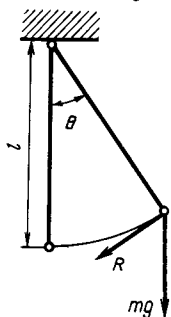


Рис. 4.2. Схема колебаний маятника в среде, обладающей сопротивлением

маятника, имеем для $\theta = \theta(t)$ нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

где λ — коэффициент затухания колебаний; g — ускорение свободного падения; l — длина маятника.

Принимая $\lambda=0,2$, $g/l=10$, приходим к начальной задаче для уравнения

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0 \quad (4.11)$$

с начальными условиями: угол отклонения — $\theta(0)=0,3$, угловая скорость — $d\theta/dt|_{t=0}=\omega(0)=0$.

Полагая $d\theta/dt=\omega$, запишем уравнение (4.11) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -0,2\omega - 10 \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Приближенное решение этой системы будем искать методом Рунге — Кутты, используя схему четвертого порядка точности. Примем $h=\Delta t=0,1$. В обозначениях системы уравнений (4.12) $\varphi=\omega$, $\psi=-0,2\omega-10 \sin \theta$, $t_i=0+ih$, $\theta_0=0,3$, $\omega_0=0$.

При $i=0$ находим:

$$k_1 = h\varphi(\theta_0, \omega_0) = 0,1 \cdot 0 = 0,0;$$

$$m_1 = h\psi(\theta_0, \omega_0) = 0,1 (0 - 10 \sin 0,3) = -0,2955;$$

$$k_2 = h\varphi(\theta_0 + k_1/2, \omega_0 + m_1/2) = 0,1 (0 - 0,2955/2) = -0,0148;$$

$$m_2 = h\psi(\theta_0 + k_1/2, \omega_0 + m_1/2) = 0,1 (0,2 \cdot 0,2955/2 - 10 \sin 0,3) = -0,2926;$$

$$k_3 = h\varphi(\theta_0 + k_2/2, \omega_0 + m_2/2) = 0,1 (0 - 0,2926/2) = -0,0146;$$

$$m_3 = h\psi(\theta_0 + k_2/2, \omega_0 + m_2/2) = 0,1 (0,2 \cdot 0,2926/2 - 10 \sin 0,2926) = -0,2855;$$

$$k_4 = h\varphi(\theta_0 + k_3, \omega_0 + m_3) = 0,1 (0 - 0,2855) = -0,0286;$$

$$m_4 = h\psi(\theta_0 + k_3, \omega_0 + m_3) = 0,1 (0,2 \cdot 0,2855 - 10 \sin 0,2854) = -0,2810.$$

Вычисляем: $\Delta\theta_0 = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = -0,0146$; $\Delta\omega_0 = \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = -0,2888$. Следовательно, при $t_1=0,1$ имеем: $\theta_1=\theta_0+\Delta\theta_0=0,2854$; $\omega_1=\omega_0+\Delta\omega_0=-0,2888$. Продолжая процесс, последовательно получаем: при $t_2=0,2$ — $\theta_2=0,2434$, $\omega_2=-0,5438$; $t_3=0,3$ — $\theta_3=0,1786$, $\omega_3=-0,7418$; $t_4=0,4$ — $\theta_4=0,0990$, $\omega_4=-0,8640$; $t_5=0,5$ — $\theta_5=0,0110$, $\omega_5=-0,8970$; при $t_6=0,6$ — $\theta_6=-0,0780$, $\omega_6=-0,8460$. На этом вычисления прекращаем, так как угол $\theta(t)$ в период времени от $t_5=0,5$ до $t_6=0,6$ меняет свой знак на противоположный. Следовательно, маятник в этот промежуток времени прошел первое положение равновесия ($\theta(t)=0$).

С помощью интерполяционных формул (например, формулы Ньютона) можно получить уточненные значения $t=0,512$ и $\omega=-0,895$ при первом прохождении заданного маятника через положение равновесия.

4.1.4. Метод последовательных приближений

Решение начальной задачи (4.1), (4.2) можно получить в виде предела последовательных приближений, построенных на рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (4.13)$$

Начальное приближение здесь может быть любым. Проще всего за начальное приближение принять y_0 . Последовательность функций y_n , вычисленных по формуле (4.13), равномерно сходится на заданном отрезке к искомому решению $y(x)$, если уравнение (4.1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Практически процесс последовательных приближений следует прекратить, когда y_{n-1} и y_n совпадут в пределах допустимой точности.

Пример 4.3. Найти методом последовательных приближений решение уравнения продольных колебаний прямолинейного стержня длиной l

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.14)$$

при условиях:

$$w(t, 0) = w(t, l) = 0, \quad w(0, x) = w_0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (4.15)$$

где $w(t, x)$ — продольные смещения стержня.

Искомую функцию $w(t, x)$ представим в виде $w(t, x) = T(t) \sin(k\pi x/l)$. При этом краевые условия в (4.15) будут выполнены. Из выражения (4.14) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'' + bT = 0, \quad (4.16)$$

где $b = (k\pi/(al))^2$, а штрихами обозначены производные по t .

Решение этого уравнения должно удовлетворять начальным условиям: $T(0) = w_0$, $T'(0) = 0$.

Уравнение (4.16) можно свести к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} T' &= Q, \\ Q' &= -bT. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему методом последовательных приближений с учетом начальных условий $T_0 = T(0) = w_0$, $Q_0 = Q(0) = 0$, последовательно получим:

$$T_1 = T_0 + \int_0^t Q_0 dz = T_0; \quad Q_1 = Q_0 + \int_0^t (-bT_0) dz = -bT_0 t;$$

$$T_2 = T_0 + \int_0^t Q_1 dz = T_0 - bT_0 \frac{t^2}{2}; \quad Q_2 = -b \int_0^t T_1 dz = -bT_0 t;$$

$$T_3 = T_0 + \int_0^t Q_2 dz = T_0 - bT_0 \frac{t^2}{2}; \quad Q_3 = -b \int_0^t T_2 dz = -b \left(T_0 t - bT_0 \frac{t^3}{6} \right);$$

$$T_4 = T_0 - b \left(T_0 \frac{t^2}{2} - bT_0 \frac{t^4}{24} \right); \quad Q_4 = -b \left(T_0 t - bT_0 \frac{t^3}{6} \right).$$

Таким образом,

$$T_n = T_0 \left(1 - b \frac{t^2}{2} + b^2 \frac{t^4}{24} - \dots \right); \quad Q_n = -bT_0 \left(t - b \frac{t^3}{6} + b^2 \frac{t^5}{120} - \dots \right),$$

откуда находим приближенное решение поставленной задачи

$$w(t, x) = w_0 \left(1 - b \frac{t^2}{2} + b^2 \frac{t^4}{24} - \dots \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

4.2. СВЕДЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К НАЧАЛЬНОЙ

4.2.1. Метод начальных параметров

Решение обыкновенного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях в одной точке (задача Коши) получают путем последовательного интегрирования уравнения по участкам, на которые может быть разбит весь интервал задания подынтегральной функции. В краевой задаче, когда для дифференциального уравнения заданы граничные условия в различных точках, необходимо получить решение в виде общего интеграла. Начальная задача в связи с этим является более простой, и для ее решения разработаны простые и эффективные численные методы, изложенные выше.

Замена краевой задачи начальной приводит к существенному упрощению решения. Для этой цели наиболее часто применяется метод начальных параметров, основанный на дополнении поставленных для краевой задачи граничных условий в начале участка интегрирования некоторыми параметрами, называемыми начальными. Эти параметры выбираются так, чтобы полученная при этом совокупность начальных условий полностью определяла решение поставленной задачи. Метод особенно эффективен в том случае, когда интервал интегрирования состоит из нескольких участков и вместо одной краевой задачи приходится решать несколько таких задач.

Пусть дана краевая задача для системы n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y(x) + F(x) \quad (4.17)$$

с граничными условиями на концах интервала $[0, l]$

$$\left. \begin{aligned} C_1 Y(0) &= B_1(0) \text{ при } x=0; \\ C_2 Y(l) &= B_2(l) \text{ при } x=l, \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

где $Y(x)$ — матрица-столбец неизвестных $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, размером $n \times 1$; $A(x)$ — квадратная матрица коэффициентов при неизвестных, размером $n \times n$; $F(x)$ — матрица-столбец свободных членов, размером $n \times 1$; C_j и B_j — матрицы-столбцы ($j=1, 2$), размером $n \times 1$.

Общий интеграл системы уравнений (4.17)

$$Y(x) = Y_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i Y_i(x), \quad (4.19)$$

где $Y_0(x)$ — частное решение матричного уравнения (4.17), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $Y(0)=0$; $Y_i(x)$ — i -е частное решение соответствующего уравнению (4.17) однородного уравнения $dY_i/dx = A(x)Y_i(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $Y_i(0) = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^T$, где все элементы равны нулю, кроме i -го, который равен единице; c_i — постоянные интегрирования.

Подстановкой полученного по (4.19) решения в условия (4.18) получают систему n алгебраических уравнений для определения c_i . Найденные постоянные подставляют в (4.19), откуда находят решение исходной краевой задачи (4.17), (4.18).

Метод начальных параметров часто применяют в строительной механике для определения прогибов и углов поворота сечений изгибаемых балок. Находит применение этот метод и при решении задач, связанных с расчетом пластин и оболочек. Однако в этом случае требуется дополнительный анализ устойчивости численного алгоритма метода.

Пример 4.4. Найти методом начальных параметров угол поворота $\vartheta(x)$ и прогиб $w(x)$ в произвольном сечении балки на двух опорах (рис. 4.3).

В данном случае имеем краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (жесткость балки $EI = \text{const}$):

$$w''(x) = -M(x)/(EI) \quad (4.20)$$

при граничных условиях

$$w(l_1) = 0, \quad w(l_1 + l_2) = 0, \quad (4.21)$$

где $M(x)$ — изгибающий момент.

Если во всем интервале интегрирования $[0, l]$ балка имеет n участков, границы которых определяются положением нагрузки и опор, то для определения угла поворота $\vartheta(x)$ и прогиба $w(x)$ необходимо решить n краевых задач и найти при этом $2n$ постоянных интегрирования. Метод начальных параметров позволяет найти решение последовательным интегрированием от участка к участку с определением из системы уравнений, которую дают граничные условия (4.21), всего двух неизвестных постоянных — начальных параметров.

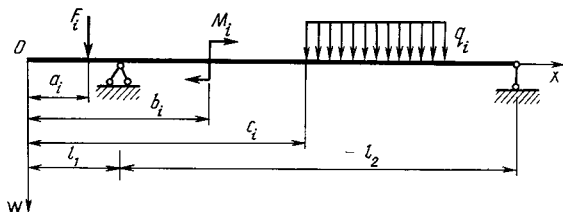


Рис. 4.3. Балка на двух опорах, загруженная произвольной нагрузкой

Полагая, что угол поворота сечения балки $\vartheta(x) = w'(x)$, из (4.20) получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} w'(x) &= \vartheta(x), \\ \vartheta'(x) &= -M(x)/(EI). \end{aligned} \right\}$$

Частные решения этих уравнений с начальными условиями при $x=0$ имеют вид:

$$w(x) = \int_0^x \vartheta(x) dx + c_1, \text{ откуда } c_1 = w_0; \quad \vartheta(x) = -\frac{1}{EI} \int_0^x M(x) dx + c_2, \text{ откуда } c_2 = \vartheta_0.$$

Следовательно,

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 - \frac{1}{EI} \int_0^x M(x) dx; \quad w(x) = w_0 + \int_0^x \vartheta(x) dx,$$

где ϑ_0 , w_0 — начальные параметры, а именно, угол поворота сечения и прогиб балки в начале координат $x=0$.

Решение поставленной задачи:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \left(M_i(x_i - a_i) + \frac{F_i(x_i - b_i)^2}{2} + \frac{q_i(x_i - c_i)^3}{6} \right);$$

$$w(x) = w_0 + \vartheta_0 x + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i(x_i - a_i)^2}{2} + \frac{F_i(x_i - b_i)^3}{6} + \frac{q_i(x_i - c_i)^4}{24} \right),$$

где a_i , b_i , c_i — расстояния от начала координат до мест приложения нагрузок.

Начальные параметры ϑ_0 , w_0 определяются подстановкой найденных выражений для $\vartheta(x)$ и $w(x)$ в граничные условия (4.21).

4.2.2. Метод дополнительных функций

Пусть решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y(x) + F(x) \quad (4.22)$$

отыскиваются в интервале $[0, 1]$. Причем граничные условия задачи поставлены таким образом, что r значений неизвестных заданы в начале интервала при $x=0$: $y_1(0)$, $y_2(0)$, ..., $y_r(0)$. Остальные $n-r$ неизвестных заданы на другом конце интервала при $x=1$: $y_{r+1}(1)$, $y_{r+2}(1)$, ..., $y_n(1)$.

Для замены данной краевой задачи начальной следует определить эти $n-r$ значений $y_i(x)$ при $x=0$, т. е. найти $y_{r+1}(0)$, $y_{r+2}(0)$, ..., $y_n(0)$.

Исходная система уравнений (4.22) без свободных членов дает систему однородных уравнений

$$\frac{dU}{dx} = A(x)U(x), \quad (4.23)$$

где $U(x) = [u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]^*$.

Для этой системы решают $n-r$ начальных задач в интервале $[0, 1]$ с начальными условиями для $u_i(x)$ в начале интервала (при $x=0$).

Для первой задачи начальные условия будут: $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$, ..., $u_r(0)=0$, $u_{r+1}(0)=1$, $u_{r+2}(0)=0$, ..., $u_n(0)=0$; для второй — $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$, ..., $u_{r+1}(0)=0$, $u_{r+2}(0)=1$, $u_{r+3}(0)=0$, ..., $u_n(0)=0$ и т. д. Для $(n-r)$ -й задачи: $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$, ..., $u_{n-1}(0)=0$, $u_n(0)=1$.

Затем находят решение системы неоднородных уравнений

$$\frac{dV}{dx} = A(x)V(x) + F(x) \quad (4.24)$$

на отрезке $[0, 1]$ с начальными условиями при $x=0$: $v_1(0)=y_1(0)$, $v_2(0)=y_2(0)$, ..., $v_r(0)=y_r(0)$, $v_{r+1}(0)=0$, ..., $v_n(0)=0$ (те значения неизвестных, которые не заданы при $x=0$, принимают равными нулю).

В общем случае решение исходной системы уравнений (4.22), удовлетворяющее заданным начальным условиям, можно записать в виде

$$y_i(x) = \sum_{m=1}^{n-r} c_m {}_m u_i(x) + v_i(x), \quad (4.25)$$

где ${}_m u_i(x)$ — значения $u_i(x)$ при решении m -й начальной задачи для системы (4.23) при соответствующих указанных выше начальных условиях.

Если в (4.25) положить $x=0$, то $c_m = y_{r+m}(0)$, т. е. c_m и есть недостающие начальные условия при $x=0$.

Все начальные условия при $x=0$ теперь имеют вид:

$$u_i(0) = 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, r; \quad v_i(0) = 0 \text{ при } i = r+1, r+2, \dots, n;$$

$${}_1 u_{r+1}(0) = 1, {}_2 u_{r+2}(0) = 1, \dots, {}_{n-r} u_n(0) = 1.$$

Подстановкой в (4.25) $x=1$ при $i=r+1, r+2, \dots, n$ получают систему $n-r$ уравнений для определения $n-r$ неизвестных c_m .

Таким образом могут быть найдены все значения $y_i(0)$. Остается решить начальную задачу для системы уравнений (4.22) в интервале $[0, 1]$ при найденных $y_i(0)$.

Известно, что погрешность, допущенная в начальном условии задачи или на каком-либо шаге интегрирования, растет по экспоненциальной зависимости с ростом x . Поэтому целесообразно краевую задачу для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений сводить к начальной таким образом [84], чтобы начальные условия располагались в середине отрезка интегрирования, т. е. при $x=0,5$. В этом случае при найденных начальных условиях для исходной системы уравнений решают две начальные задачи на отрезках $[0; 0,5]$ и $[0,5; 1]$. Чтобы найти начальные условия при $x=0,5$, необходимо решить n начальных задач для системы уравнений (4.23).

Пример 4.5. Свести краевую задачу к начальной с применением метода дополнительных функций для дифференциального уравнения оси изогнутой балки пролетом $l=1$ с шарнирным опиранием концов, нагруженную в середине пролета силой $F=1$: $w''(x) = -x/(2EI)$ при граничных условиях $w(0)=0$, $w'(0,5)=0$.

Заданное дифференциальное уравнение второго порядка сведем к системе уравнений первого порядка, приняв $w(x)=y_1(x)$, $w'(x)=y_2(x)$:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -x/(2EI). \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Граничные условия:

$$y_1(0)=0, \quad y_1(1)=0. \quad (4.27)$$

Матрицы A и F системы уравнений (4.22):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -x/(2EI) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с методом дополнительных функций находим решение системы однородных уравнений (4.23), которая в данном случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= u_2, \\ u'_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Так как неизвестно только одно условие, а именно $y_2(0)$, необходимо для этой системы решить всего одну начальную задачу с условиями $u_1(0)=0$, $u_2(0)=1$. Решение системы уравнений (4.28) с этими начальными условиями найдем методом последовательных приближений (см. § 4.1.4):

$$u_1(x) = \int_0^x u_2(t) dt = \int_0^x 1 dx = x, \quad u_2(x) = 1 + \int_0^x 0 dt = 1.$$

Система (4.24) для данного примера

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= v_2, \\ v'_2 &= -x/(2EI) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

при начальных условиях $v_1(0)=y_1(0)=0$, $v_2(0)=0$ (так как $y_2(0)$ не задано).

Решая эту систему методом последовательных приближений, находим:

$$v_1^{(1)} = \int_0^x 0 dt = 0; \quad v_2^{(1)} = \frac{1}{EI} \int_0^x \left(-\frac{t}{2} \right) dt = -\frac{x^2}{4EI};$$

$$v_1^{(2)} = \frac{1}{EI} \int_0^x \left(-\frac{t^2}{4} \right) dt = -\frac{x^3}{12EI}; \quad v_2^{(2)} = -\frac{x^2}{4EI}.$$

Следовательно, $v_1(x) = -x^3/(12EI)$, $v_2(x) = -x^2/(4EI)$ и система (4.25) для определения $y_2(0)$ будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= c_1 u_1(x) + v_1(x), \\ y_2(x) &= c_1 u_2(x) + v_2(x). \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения этой системы при $x=0$ получим $y_2(0)=c_1$, а первое уравнение превращается в тождество.

Неизвестную c_1 находим из первого уравнения, если при $x=0,5$ задано $y_1(x)$, или из второго, если при $x=0,5$ задано $y_2(x)$. В данном случае задано $y_2(0,5)$, поэтому из второго уравнения имеем при $x=0,5$: $0=c_1-1/(16EI)$, или $c_1=1/(16EI)$.

Следовательно, недостающее при $x=0$ начальное условие будет $y_2(0)=1/(16EI)$, и граничная задача сведена к начальной. Так как решения систем (4.28) и (4.29) найдены точно, то и значение $y_2(0)$ будет точным. В результате мы пришли к начальной задаче для системы уравнений (4.26) с начальными условиями $y_1(0)=0$, $y_2(0)=1/(16EI)$.

4.3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

4.3.1. Решение краевых задач

Рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.30)$$

с линейными краевыми условиями:

$$\Gamma_a[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \quad \Gamma_b[y] \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (4.31)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$; $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные функции, непрерывные на $[a, b]$.

Решение этой задачи находят в виде

$$y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.32)$$

где функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (4.31) ($\Gamma_a[\varphi_0] = A$, $\Gamma_b[\varphi_0] = B$), а функции $\varphi_i(x)$ — однородным условиям $\Gamma_a[\varphi_i] = 0$, $\Gamma_b[\varphi_i] = 0$. Здесь $\{\varphi_i(x)\}$ — последовательность известных линейно независимых функций, называемых координатными (базисными) функциями.

Если выражение (4.32) подставить в (4.30), получится невязка

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[\varphi_0] + \sum_{i=1}^n c_i L[\varphi_i] - f(x).$$

Для точного решения поставленной краевой задачи должно быть $R \equiv 0$. Для получения приближенного решения, близкого к точному, необходимо коэффициенты c_i подобрать так, чтобы значения функции R были малы.

Согласно методу Галеркина, необходимо, чтобы невязка R была ортогональна к функциям $\varphi_i(x)$. При этом обеспечивается малость невязки в среднем. Для определения c_i получают систему линейных уравнений

$$\int_a^b R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \varphi_k(x) dx = 0,$$

или в развернутом виде

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b L[\varphi_i] \varphi_k(x) dx = \int_a^b (f(x) - L[\varphi_0]) \varphi_k(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4.33)$$

Для сходимости приближенного решения, полученного методом Галеркина, к точному необходимо, чтобы система координатных функций $\{\varphi_i(x)\}$ была полной в рассматриваемом пространстве.

Пример 4.6. Найти методом Галеркина приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения $y'' + (1+x^2)y = -1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(-1) = y(1) = 0$.

Решение ищем в виде

$$y = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ должны удовлетворять краевым условиям $\varphi_i(-1) = \varphi_i(1) = 0$. Исходя из этих условий, за координатные функции принимаем систему функций $\varphi_i(x) = 1 - x^{2i}$.

Ограничиваясь двумя членами ($i=1, 2$), получим:

$$y_2 = c_1(1-x^2) + c_2(1-x^4), \quad y_2'' = -(c_1 + 12c_2x^2).$$

Для определения коэффициентов c_1, c_2 получим из (4.33) систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 (y_2'' + (1+x^2)y_2 + 1)(1-x^2) dx &= 0; \\ \int_{-1}^1 (y_2'' + (1+x^2)y_2 + 1)(1-x^4) dx &= 0, \end{aligned} \right\}$$

или после подстановки y_2, y_2''

$$\left. \begin{aligned} \frac{38}{105}c_1 + \frac{4}{9}c_2 &= \frac{1}{3}; \\ \frac{4}{9}c_1 + \frac{2488}{3645}c_2 &= \frac{2}{5}. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, найдем $c_1 = 0,988, c_2 = -0,054$. Приближенное решение задачи имеет вид $y_2 = 0,934 - 0,988x^2 + 0,054x^4$.

4.3.2. Решение задач на собственные значения

Пусть требуется найти такие значения числового параметра λ , при которых дифференциальное уравнение

$$L[y] + \lambda g(x)y = 0$$

имеет ненулевые решения ($y \neq 0$), удовлетворяющие однородным краевым условиям. Следуя методу Галеркина, решение принимают в виде (4.32). После подстановки этого решения в заданное однородное дифференциальное уравнение получают систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно c_i . Для нахождения ненулевых решений определитель этой системы приравнивают нулю и получают в общем случае нелинейное алгебраическое уравнение для определения собственных значений λ .

Пример 4.7. Найти методом Галеркина наименьшее собственное значение дифференциального уравнения $y'' + \lambda xy = 0$ при краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$. Решение задачи представим в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^n c_i x^i (1-x),$$

удовлетворяющем заданным краевым условиям.

В соответствии с методом Галеркина для определения параметров c_i имеем из (4.33) систему уравнений

$$\int_0^1 (y_n'' + \lambda x y_n) x^i (1-x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.34)$$

Для определения собственных значений λ необходимо определитель этой системы уравнений приравнять нулю.

Примем $i=1$, тогда $y_1 = c_1 x(1-x)$. Вычислив определенный интеграл, получим $c_1(-1/3 + \lambda/60) = 0$. Так как $c_1 \neq 0$, $-1/3 + \lambda/60 = 0$, откуда $\lambda = 20$.

Для уточнения значения $\lambda_{\min}$ примем $i=2$, тогда

$$y_2 = c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x).$$

В этом случае получим из (4.34) систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \left(-\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{60}\right) c_1 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{105}\right) c_2 &= 0; \\ \left(-\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{105}\right) c_1 + \left(-\frac{2}{15} + \frac{\lambda}{168}\right) c_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Приравняв определитель этой системы уравнений нулю, получим уравнение для нахождения λ

$$3\lambda^2 - 13 \cdot 28\lambda + 56 \cdot 105 = 0,$$

откуда уточненное значение $\lambda_{\min} = 19,18$.

4.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

4.4.1. Решение краевых задач

Рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.35)$$

при линейных краевых условиях:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (4.36)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ — заданные числа, а $p(x), q(x), f(x)$ — заданные функции, непрерывные на $[a, b]$.

При решении задачи методом конечных разностей отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей с шагом $h = (b-a)/n$. Точки деления отрезка на части (рис. 4.4) имеют абсциссы $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), причем $x_0 = a, x_n = b$.

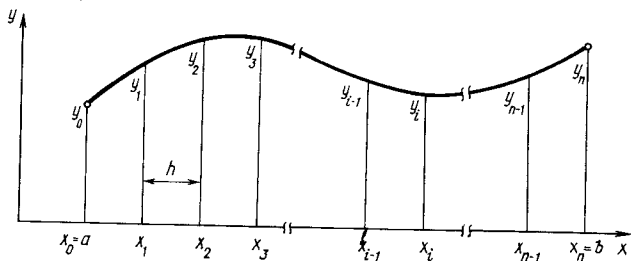


Рис. 4.4. Деление отрезка $[a, b]$ на n частей при составлении конечно-разностных уравнений

Значения искомой функции $y(x)$ в точках x_i и ее производных $y'(x)$ и $y''(x)$: $y_i = y(x_i)$, $y'_i = y'(x_i)$, $y''_i = y''(x_i)$. Кроме того, вводятся обозначения: $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Для производных y'_i и y''_i можно записать приближенно с погрешностью $O(h)$ по формуле Тейлора следующие конечно-разностные

отношения для внутренних точек x_i отрезка $[a, b]$:

$$y'_i = (y_{i+1} - y_i) / h; \quad y''_i = (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) / h^2. \quad (4.37)$$

Для граничных точек $x_0 = a$, $x_n = b$ подобные отношения имеют вид:

$$y'_0 \approx (y_1 - y_0) / h; \quad y'_n \approx -(y_{n-1} - y_n) / h. \quad (4.38)$$

Дифференциальное уравнение (4.35) для точек x_i при $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ приближенно, используя соотношения (4.37), можно заменить системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i. \quad (4.39)$$

Кроме того, из краевых условий (4.36) и соотношений (4.38) следуют еще два уравнения:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \quad (4.40)$$

Из решения линейной системы $n+1$ уравнений (4.39), (4.40) с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, \dots, y_n$ определяют приближенные значения искомой функции $y(x)$ в точках x_i .

Систему уравнений (4.39) можно представить в матричной форме

$$AY = F, \quad (4.41)$$

где матрица коэффициентов A — квадратная трехдиагональная матрица размером $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} q_0 - \frac{p_0}{h} + \frac{1}{h^2} & \frac{p_0}{h} - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ 0 & q_1 - \frac{p_1}{h} + \frac{1}{h^2} & \frac{p_1}{h} - \frac{2}{h^2} & & & \\ 0 & & 0 & q_2 - \frac{p_2}{h} + \frac{1}{h^2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \\ \frac{1}{h^2} & \dots & 0 & & 0 & \\ \frac{p_2}{h} - \frac{2}{h^2} & \dots & 0 & & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & q_n - \frac{p_n}{h} + \frac{1}{h^2} & & \end{bmatrix},$$

а матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов имеют вид:

$$Y = [y_0, y_1, \dots, y_n]^*, F = [f_0, f_1, \dots, f_n]^*.$$

Поскольку система линейных уравнений (4.41) имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов, для ее решения можно применить метод прогонки (см. § 2.2.1).

В случае анализа симметричных краевых задач решение упрощается, а точность его повышается. Здесь для аппроксимации производных используются не односторонние (4.37), а симметричные конечно-разностные отношения, которые дают более точный результат с погрешностью $O(h^2)$:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (4.42)$$

При этом дифференциальное уравнение (4.35) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (4.43)$$

решение которой совместно с (4.40) дает приближенные значения $y(x)$.

Алгоритм вычислений при решении одномерных краевых задач методом конечных разностей предполагает следующие операции.

1. Выбирают шаг; отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивают на n участков.

2. Формируют исходные данные задачи p_i, q_i, f_i и матрицу коэффициентов A с учетом граничных условий.

3. Находят значения неизвестных y_i из решения матричного уравнения (4.41). В случае симметричной задачи достаточно найти решение на половине отрезка $[a, b]$.

Пример 4.8. Найти методом конечных разностей решение краевой задачи [25] для уравнения

$$y'' + (1+x^2)y = -1 \quad (4.44)$$

при граничных условиях

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (4.45)$$

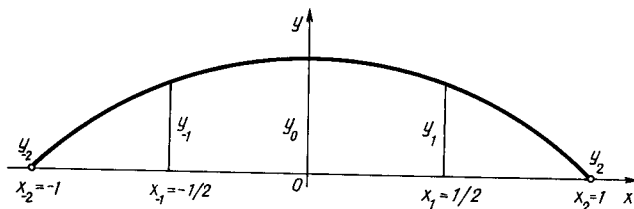


Рис. 4.5. К решению краевой задачи методом конечных разностей

Назначаем шаг $h = 1/2$ и полагаем (рис. 4.5): $x_{-2} = -1, x_{-1} = -1/2, x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$. Вследствие симметрии задачи (4.44), (4.45) $y_{-2}(-1) = y_2(1) = 0, y_{-1} = y_1$.

Используя симметричные формулы для аппроксимации производных, запишем уравнения (4.43):

$$\text{при } x_0=0 \quad \frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{h^2} + (1+0)y_0 = -1;$$

$$\text{при } x_{-1}=1/2 \quad \frac{y_0-2y_{-1}+y_{-2}}{h^2} + (1+1/4)y_{-1} = -1.$$

Поскольку $y_{-2}=0$ и $y_{-1}=y_1$, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -7y_0 + 8y_1 &= -1; \\ 16y_0 - 27y_1 &= -4, \end{aligned} \right\}$$

откуда $y_0=0,967$, $y_1=y_{-1}=0,721$. Сопоставление этого результата с решением того же уравнения методом Галеркина (см. пример 4.6) показывает, что их разница не превышает 5%.

При решении краевых задач для линейных дифференциальных уравнений высоких порядков применяются следующие формулы для аппроксимации производных:

$$\left. \begin{aligned} y'_i &= \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}); \\ y''_i &= \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}); \\ y'''_i &= \frac{1}{2h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}); \\ y^{IV}_i &= \frac{1}{h^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

и т. д.

Например, расчет балок переменной жесткости, лежащих на упругом основании (рис. 4.6), сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка относительно функции прогиба $y(x)$ с переменными коэффициентами

$$y^{IV}(x) + \frac{k(x)}{EI(x)} y = \frac{q}{EI(x)} \quad (4.47)$$

при заданных граничных условиях. Здесь $k(x)$ — заданный коэффициент постели (характеристика основания); $EI(x)$ — жесткость балки.

Для решения этого уравнения методом конечных разностей балку длиной l разбивают на n участков с шагом h таким образом, чтобы границы участков совпадали с заданными нагрузками, и принимают коэффициент постели и жесткость балки постоянными, равными k_i и EI_i в пределах каждого участка $[x_i, x_{i+1}]$. Уравнение (4.47), записанное в конечных разностях с помощью формул (4.46), принимает вид системы алгебраических уравнений

$$y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2} + h^4 \frac{k_i}{EI_i} y_i = \frac{h^4 q_i}{EI_i}$$

($i=2, 3, \dots, n-2$),

которая решается аналогично системе (4.41) методом прогонки (см. § 2.2.2) с пятидиагональной матрицей коэффициентов.

При решении дифференциальных уравнений выше второго порядка значения функций y_i , выходящие за пределы интервала интегрирования, исключают с помощью заданных краевых условий.

4.4.2. Решение задач на собственные значения

При решении методом конечных разностей одномерных задач на собственные значения необходимо найти ненулевое решение однородного линейного дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими, помимо x , еще и от параметра λ (собственного значения):

$$L[y] + \lambda f(x)y = 0; \quad (4.48)$$

$$U(y) = 0,$$

где y — неизвестная (собственная) функция; L, U — операторы уравнений и краевых условий задачи; $f(x)$ — известная функция.

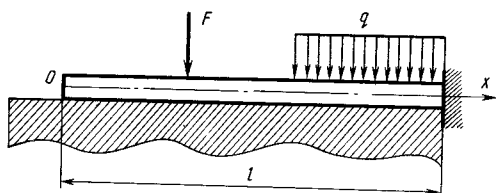


Рис. 4.6. Балка на упругом основании

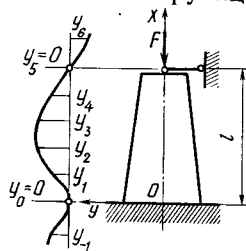


Рис. 4.7. Центально сжатый стержень переменной жесткости

Для нахождения приближенного собственного значения методом конечных разностей используют формулы для производных (4.46), а задача (4.48) сводится к решению системы алгебраических уравнений вида $A\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, т.е. к задаче нахождения собственных значений матрицы A (см. § 2.4.1).

Пример 4.9. Найти методом конечных разностей наименьшее собственное значение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + \lambda xy = 0 \quad (4.49)$$

при краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Разбиваем отрезок интегрирования $[0, 1]$ на четыре части, полагая шаг $h = 1/4$. По формулам (4.46) находим

$$\frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \lambda xy_i = 0,$$

откуда при $x = ih$ ($i = 1, 2, 3$) с учетом того, что $y_0 = y(0) = 0$, $y_4 = y(1) = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \lambda h^2 - 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2\lambda h^2 - 8 & 4 \\ 0 & 4 & 3\lambda h^2 - 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Приравнивая определитель матрицы коэффициентов этой системы уравнений нулю при $h=1/4$, получаем из решения кубического уравнения $\lambda=17,88$, что только на 6% отличается от точного наименьшего собственного значения заданного уравнения (4.49).

Пример 4.10. Найти методом конечных разностей критическую силу F_{cr} для центрально сжатого стержня переменной жесткости, защемленного на одном конце и шарнирно закрепленного на другом (рис. 4.7). Жесткость стержня $EI(x)=EI(2-x)$.

Обозначая $\lambda=F/(EI)$ и принимая $l=1$, приходим к задаче на собственные значения [42] для уравнения

$$((2-x)y'')'' + \lambda y'' = 0$$

при краевых условиях $y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$.

Заменим в этом уравнении производные y'', y''', y^{IV} их выражениями по соответствующим разностным формулам (4.46) при шаге $h=1/5$, что соответствует $i=0, 1, \dots, 5$. При этом учитываем, что краевые условия в конечных разностях примут вид $y_0=y_5=0$ и $y_n=y_{-n}$, $y_{n+1}=-y_{n-1}$ при $n>5$.

С помощью этих условий можно исключить значения функций y_i , выходящие из пределов заданного интервала $[0, 1]$, например $y_6=-y_4$, $y_{-1}=y_1$ и т. д. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 5h^2\lambda - 34 & -4 & -8 & -4 \\ 9 & 5h^2\lambda - 16 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 5h^2\lambda - 14 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 5h^2\lambda - 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель матрицы коэффициентов этой системы, получаем уравнение четвертой степени относительно λ , решая которое, находим собственные значения заданного дифференциального уравнения: $\lambda_1=27,30$, $\lambda_2=70,29$, $\lambda_3=115,4$, $\lambda_4=167$. Значение критической силы находим исходя из наименьшего собственного значения: $F_{cr}=\lambda_1 EI=27,3 EI$. Полученный приближенный результат отличается от точного на 7%.

4.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

4.5.1. Жесткие системы уравнений в задачах строительной механики

Жесткие уравнения — это дифференциальные уравнения, решения которых описываются убывающими функциями с большими по модулю производными, а также функциями с малыми по модулю производными.

Например, решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений [30]

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 998x + 1998y, \\ y'(t) &= -999x - 1999y \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

с граничными условиями $x(0)=1$, $y(0)=0$ записывается в виде: $x=2e^{-t}-e^{-1000t}$, $y=-e^{-t}+e^{-1000t}$, где t — время.

Каждая компонента этого решения содержит как «медленную», так и «быструю» составляющую. Очевидно, что «быстрая» составляющая e^{-1000t} лишь в малой окрестности $(0; 0,01)$ начальной точки

$t=0$ вносит существенный вклад в решение. Затем поведение функций $x(t)$ и $y(t)$ определяется в основном составляющей e^{-t} . Тем не менее при численном интегрировании системы (4.50) ограничение на величину шага h накладывает именно составляющая e^{-1000t} , т. е. шаг в данном случае должен быть $h < 0,001$.

Основная трудность решения жестких систем уравнений состоит в том, что малый шаг при численном интегрировании, необходимый для воспроизведения быстропротекающих процессов, не может быть увеличен и в дальнейшем, когда значение производной решения становится существенно меньше начального. Первый участок, например интервал $[0; 0,01]$ для системы (4.50), с быстрым убыванием искомой функции называется *пограничным слоем*.

При решении нелинейной динамической задачи теории пластин и пологих оболочек методом Власова — Канторовича приходится решать начальную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге — Кутты. При изменяющейся во времени распределенной нагрузке интенсивности $q = Vt$, где V — параметр скорости нагружения, с возрастанием V решение задачи (например, прогиб w точки срединной поверхности оболочки) становится очень чувствительным к шагу h_i по временной координате t .

Как показывают расчеты оболочек на устойчивость при динамическом нагружении, например при значениях параметра скорости нагружения от 100 до 1000 и соответствующем уменьшении времени нагружения t , шаг h_i в методе Рунге — Кутта приходится существенно уменьшать — от 0,001 до 0,0001, а число шагов соответственно увеличивать с 2000 до 4000. Это говорит о том, что получающаяся при решении таких динамических задач система обыкновенных дифференциальных уравнений относится к жестким системам уравнений, так как в малой окрестности нулевой точки ее решение является быстро убывающей функцией.

4.5.2. Применение неявной схемы метода Рунге — Кутта для решения жестких систем уравнений

В общем случае при решении начальной задачи (4.1), (4.2) методом Рунге — Кутта применяется формула

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{r=1}^p \gamma_r k_r, \quad (4.51)$$

где

$$k_r = hf(\tau_r, \eta_r); \quad h = x_{i+1} - x_i; \quad \tau_r = x_i + \alpha_r h; \quad 0 \leq \alpha_r \leq 1;$$

$$\eta_r = y_i + \sum_{j=1}^p \beta_{rj} k_j. \quad (4.52)$$

Здесь α_r , β_{rj} , γ_r — действительные числа, которые подбирают таким образом, чтобы функция

$$\delta = \int_{x_i}^{x_i+h} f(t, \tilde{y}(t)) dt - \sum_{r=1}^p \gamma_r k_r \quad (4.53)$$

переменной h была бесконечно малой величиной высокого порядка относительно h при $h \rightarrow 0$. В этом выражении $\tilde{y}(t)$ — решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условию $\tilde{y}(x_i) = y_i$. Числа α_r , β_{rj} , γ_r не определяются однозначно условием (4.53). Отсюда следует множество схем метода Рунге — Кутта даже одного и того же порядка точности.

Если $\beta_{rj} = 0$ при $j \geq r$, формула (4.51) определяет *явную схему метода Рунге — Кутта*; если $\beta_{rj} = 0$ при $j > r$, схема будет *полужавной*, а в остальных случаях — *неявной*. В § 4.1 рассмотрены явные схемы. В них $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_r = f(x_i + \alpha_r h, y_i + h \sum_{j=1}^{r-1} \beta_{rj} k_j)$ при $r > 1$

вычисляются по рекуррентным формулам.

Явные схемы метода Рунге — Кутта не пригодны для решения жестких систем уравнений. Для этих уравнений лучше использовать полужавные и неявные схемы, при реализации которых строят итерационные процессы.

Одна из неявных схем метода Рунге — Кутта, имеющая порядок точности $O(h^5)$, может быть представлена соотношениями [30]

$$y_{i+1} = y_i + 0,5(k_1 + k_2), \quad (4.54)$$

где $k_1 = hf(\tau_1, \eta_1)$; $k_2 = hf(\tau_2, \eta_2)$; $\tau_1 = x_i + \alpha_1 h$; $\tau_2 = x_i + \alpha_2 h$; $\eta_1 = y_i + \beta_{11}k_1 + \beta_{12}k_2$; $\eta_2 = y_i + \beta_{21}k_1 + \beta_{22}k_2$.

Параметры α_r и β_{rj} для данной неявной схемы имеют значения [30]: $\alpha_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$; $\alpha_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$; $\beta_{11} = 1/4$; $\beta_{12} = 1/4 - \sqrt{3}/6$; $\beta_{21} = 1/4 + \sqrt{3}/6$; $\beta_{22} = 1/4$.

При реализации схемы (4.54) на каждом шаге имеет место итерационный процесс:

$$\eta_1^{(s+1)} = y_i + \beta_{11}k_1^{(s)} + \beta_{12}k_2^{(s)}; \quad \eta_2^{(s+1)} = y_i + \beta_{21}k_1^{(s)} + \beta_{22}k_2^{(s)};$$

$$k_1^{(s)} = hf(\tau_1, \eta_1^{(s)}); \quad k_2^{(s)} = hf(\tau_2, \eta_2^{(s)}); \quad \tau_1 = x_i + \alpha_1 h;$$

$$\tau_2 = x_i + \alpha_2 h; \quad k_1^{(0)} = hf(x_i, y_i); \quad k_2^{(0)} = hf(x_i, y_i) \quad (s = 0, 1, 2, 3).$$

Пример 4.11. Используя неявную схему метода Рунге — Кутта (4.54), найти решение дифференциального уравнения $y' = -1000y$ на отрезке $[0; 0,005]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Табл. 4.1. Значения параметров $\eta_1^{(s)}$ и $k_1^{(s)}$

s	$\eta_1^{(s)}$	$\eta_2^{(s)}$	$k_1^{(s)}$	$k_2^{(s)}$
1	0,7887	0,2113	-0,7887	-0,2113
2	0,8110	0,5223	-0,8110	-0,5223
3	0,8175	0,4325	-0,8175	-0,4325
4	0,8123	0,4515	-0,8123	-0,4515
5	0,8144	0,4495	-0,8144	-0,4495
6	0,8138	0,4489	-0,8139	-0,4489
7	0,8139	0,4494	-0,8139	-0,4494
8	0,8139	0,4492	-0,8139	-0,4492

Примем шаг по оси x $h=0,001$. Для того чтобы на каждом шаге вычислить k_1 и k_2 , необходимо организовать итерационный процесс. На первом шаге будем иметь: $x_0=0$, $y_0=y(0)=1$, $f(x_0, y_0)=-1000 \cdot 1=-1000$.

Следовательно, $k_1^{(0)}=hf(x_0, y_0)=-1$; $k_2^{(0)}=hf(x_0, y_0)=-1$.

Находим $\eta_1^{(1)}=y_0+\beta_{11}k_1^{(0)}+\beta_{12}k_2^{(0)}=0,7887$, $\eta_2^{(1)}=0,2113$, $k_1^{(1)}=hf(\tau_1, \eta_1^{(1)})=-0,7887$, $k_2^{(1)}=-0,2113$.

В данном примере τ_1 , τ_2 не входят в $f(x, y)$.

Продолжая итерационный процесс, результаты которого приведены в табл. 4.1, принимаем $k_1=-0,8139$; $k_2=-0,4492$. Теперь по формуле (4.54) находим значение y_1 при $x=0,001$: $y_1=y_0+0,5(k_1+k_2)=0,3683$. Точное значение $y_1=0,3679$.

Аналогично находим значения $y_2(0,002)=0,1359$, $y_3(0,003)=0,0504$, $y_4(0,004)=-0,0191$, $y_5(0,005)=0,0077$, которые определяют приближенное решение поставленной задачи.

4.6. МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОСОБЕННОСТИ В ВИДЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ХЕВИСАЙДА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

4.6.1. Основные положения метода

Решения одномерных задач теплопроводности и термоупругости тонкостенных конструкций с нарушенной геометрической регулярностью и находящихся под действием кусочно-непрерывных и сосредоточенных нагрузок и температурных полей сводятся к интегрированию обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений с особенностями в виде обобщенных функций Хевисайда и их производных. Эти решения основаны на следующем методе, позволяющем находить интегралы уравнений указанного типа.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L^n[f(x)] = \sum_{i=1}^k b_i(x)H(x-x_i), \quad (4.55)$$

где L^n — линейный дифференциальный оператор порядка n с постоянными коэффициентами $L^n = \sum_{j=1}^n a_j d^j/dx^j$ ($a_n=1$); $b_i(x)$ — известные функции; $H(x-x_i)$ — обобщенные функции Хевисайда.

Если ввести в рассмотрение вспомогательные уравнения

$$L^n[f_i(x)] = b_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

частные интегралы которых известны, то функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x-x_i)$$

является частным интегралом уравнения (4.55), где C_m^i — решения систем линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = - \frac{d^l \tilde{f}_i}{dx^l} \Big|_{x_i}, \quad (4.56)$$

а система функций $\{\varphi_m(x)\}$ — фундаментальная система решений уравнения (4.55), т. е. такая система линейно независимых функций, линейная комбинация которых дает общее решение соответствующего однородного уравнения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4.55)

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{i=1}^k \left(\sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x-x_i), \quad (4.57)$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой (4.57) в (4.55). Здесь C_m — постоянные интегрирования.

Пусть дифференциальное уравнение содержит обобщенную дельта-функцию

$$L^n[f(x)] = b(x_i) \delta(x-x_i), \quad (4.58)$$

где $b(x_i)$ — значение известной функции $b(x)$ в точке x_i ; $\delta(x-x_i)$ — дельта-функция.

Решением уравнения (4.58) является функция

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) H(x-x_i), \quad (4.59)$$

где C_m^i — решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = \gamma_l; \quad \gamma_l = \begin{cases} 0 & \text{при } l=0, 1, \dots, n-2; \\ b(x_i) & \text{при } l=n-1. \end{cases} \quad (4.60)$$

4.6.2. Решение дифференциальных уравнений, содержащих производные от обобщенной дельта-функции

Если дифференциальное уравнение содержит производную от обобщенной дельта-функции

$$L^n[f(x)] = b(x) \frac{d\delta(x-x_i)}{dx},$$

правая его часть преобразуется к виду

$$b(x) \frac{d\delta}{dx} = b(x_i) \frac{d\delta}{dx} - \frac{db}{dx} \Big|_{x_i} \delta(x-x_i).$$

В этом случае интерес представляет решение, позволяющее определить частный интеграл уравнения

$$L^n[f(x)] = b(x_i) \frac{d\delta(x-x_i)}{dx}. \quad (4.61)$$

Общий интеграл этого уравнения также можно представить в виде (4.59), где C_m^i определяются как решения системы алгебраических уравнений (4.60), свободные члены которых

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{при } l \leq n-3; \\ b(x_i) & \text{при } l = n-2; \\ -d_{n-1}b(x_i) & \text{при } l = n-1. \end{cases}$$

В том случае, когда правая часть дифференциального уравнения содержит вторую производную от обобщенной дельта-функции, структура решения (4.59) не изменится. Свободные члены соответствующей системы алгебраических уравнений в этом случае

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{при } l \leq n-4; \\ b(x_i) & \text{при } l = n-3; \\ -d_{n-1}b(x_i) & \text{при } l = n-2; \\ (d_{n-1}^2 - d_{n-2})b(x_i) & \text{при } l = n-1. \end{cases}$$

Метод определения замкнутых решений частично вырожденных дифференциальных уравнений распространяется и на уравнения, содержащие производные от дельта-функций третьего и выше порядков.

Пример 4.12. Найти решение задачи о пластинке, находящейся в состоянии стационарного теплообмена с окружающей средой при одинаковых коэффициентах теплоотдачи κ с обеих поверхностей $z = \pm h/2$, где h — толщина пластинки. На линиях $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), параллельных двум краям пластинки, допускается скачкообразное изменение температуры внешней среды $T^+(x, y)$ со стороны $z = h/2$. Это возможно, например, при наличии термоизолирующих перегородок или фронтов ударных волн внешней среды у поверхности пластинки.

Пусть на краях $y = 0$ и $y = b$ поддерживается нулевая температура. Тогда решение уравнений теплопроводности

$$\lambda \nabla^2 \theta_m - 2 \frac{\kappa}{h} \theta_m = - \frac{\kappa}{h} (T^+(x, y) + T^-(x, y)),$$

$$\lambda \nabla^2 (\Delta \theta) - \left(6 \frac{\kappa}{h} + 12 \frac{\lambda}{h^2} \right) \Delta \theta = - 6 \frac{\kappa}{h} (T^+(x, y) - T^-(x, y))$$

для функций $\theta_m(x, y)$ и $\Delta \theta(x, y)$, связанных с температурой $\theta(x, y, z)$ равенством $\theta(x, y, z) = \theta_m(x, y) + (z/h) \Delta \theta(x, y)$, сводится подстановкой $\theta_m(x, y) = \sum_k \varphi_k(x) \sin y_k$, $\Delta \theta(x, y) = \sum_k \psi_k(x) \sin y_k$ к интегрированию следующих дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \frac{a_{11}^k}{b^2} \varphi_k &= \frac{\kappa}{\lambda h} (T_k^+(x) + T_k^-(x)), \\ \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} - \frac{a_{21}^k}{b^2} \psi_k &= - 6 \frac{\kappa}{\lambda h} (T_k^+(x) - T_k^-(x)). \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Здесь a_{11}^k, a_{21}^k — постоянные, зависящие от $\kappa, \lambda, h, a/b$; a и b — размеры пластинки в плане; $T_k^\pm(x) = (2/b) (T^\pm(x, y), \sin y_k)$; $y_k = k\pi y/b$.

В случае одного температурного скачка со стороны плоскости $z=h/2$

$$T^+ = T_0^+ H(x - x_i); \quad T^- = \text{const};$$

$$T_k^+ = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T_0^+ H(x - x_i); \quad T_k^- = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T^-.$$

Общее решение уравнений (4.62) на основании (4.56) записываем в виде:

$$\varphi_k(x) = C_k^1 e^{x_{11}} + C_k^2 e^{-x_{11}} + 2L_k' T_0^+ \left(1 - \text{ch} \frac{\sqrt{a_{11}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) + \\ + 2L_k' T^-;$$

$$\psi_k(x) = D_k^1 e^{x_{21}} + D_k^2 e^{-x_{21}} + \\ + 12L_k^s T_0^+ \left(1 - \text{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) - 12L_k^s T^- ,$$

где C_k^j, D_k^j ($j=1, 2$) — постоянные интегрирования; $L_k' = \kappa_k^* / (k\pi a_{11}^k)$; $L_k^s = \kappa_k^* / (k\pi a_{21}^k)$; $\kappa_k^* = (b/h)^2 (\kappa b/\lambda) (1 - \cos k\pi)$.

Если предположить, что края пластинки ($x=0, x=a$) теплоизолированы, т. е. $\partial\theta/\partial x=0, \partial\theta_m/\partial x=0, \partial\Delta\theta/\partial x=0$, то, например, функция $\psi_k(x)$ примет вид

$$\psi_k(x) = \frac{12L_k^s T_0^+ \text{sh} (\sqrt{a_{21}^k} (a - x_i)/b)}{\text{sh} (\sqrt{a_{21}^k} a/b)} \text{ch } x_{21} + \\ + 12L_k^s T_0^+ \left(1 - \text{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) - 12L_k^s T^-.$$

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Решение двумерных и трехмерных задач строительной механики в линейной постановке связано с интегрированием линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго и более высоких порядков. Например, уравнения равновесия тонких оболочек могут быть восьмого или четвертого порядка в зависимости от используемой в решении теории оболочек. Уравнение изгиба пластинки представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Наиболее часто в многомерных линейных краевых задачах строительной механики используются дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического (например, уравнение Пуассона в задаче о кручении стержня произвольного поперечного сечения) или гиперболического типа (например, волновое уравнение в задаче о колебаниях мембраны).

Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных связано с большими математическими трудностями, которые преодолеваются с помощью численных методов, позволяющих с применением ЭВМ получать приближенные, но вполне удовлетворяющие практическим целям решения. Численные методы решения многомерных линейных краевых задач строительной механики позволяют также понизить размерность задачи и свести ее к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений либо сразу свести решение краевой задачи в частных производных к решению системы линейных алгебраических уравнений.

5.1. МЕТОД СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1.1. Основы построения разностных схем

Метод сеток, как часто называют метод конечных разностей для многомерных задач, является одним из распространенных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (в основном эллиптического типа).

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$L(u) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, \quad (5.1)$$

в которой граничные условия представлены заданием неизвестной функции $u(x, y)$ на границе Γ области D (задача Дирихле).

Здесь a, b, c, d, g, f — функции независимых переменных x и y , определенные и непрерывные в области D .

Требуется найти решение уравнения (5.1), т. е. определить функцию $u = u(x, y)$, непрерывную в D и удовлетворяющую на границе Γ условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (5.2)$$

где $\varphi(x, y)$ — непрерывная на Γ функция.

Для отыскания приближенного численного решения этой задачи на область D наносится сетка — два семейства взаимно перпендикулярных параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih_x \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$y = y_0 + jh_y \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где h_x, h_y — шаги сетки в направлении осей x и y .

Точки пересечения указанных прямых называются узлами. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси x или y на расстояние шага сетки по этой оси.

Обычно рассматриваются только те узлы, которые принадлежат области D , включая ее границу Γ , т. е. $D + \Gamma$. Но могут использоваться и законтурные узлы. Те узлы, которые с четырьмя соседними узлами принадлежат множеству $D + \Gamma$, называются внутренними. Множество внутренних узлов сетки называют сеточной областью и обозначают W_h ; те узлы, хотя бы один соседний узел которых не принадлежит $D + \Gamma$, — граничными, а совокупность их — границей сеточной области и обозначают W_h^* .

Для каждого внутреннего узла (i, j) составляют разностное уравнение, для чего в точке $(x_0 + ih_x, y_0 + jh_y)$ производные, входящие в уравнение (5.1), заменяют разностными отношениями типа

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}; \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где $u_{i,j} = u(x_0 + ih_x, y_0 + jh_y)$.

Аналогично для узла (i, j) обозначают коэффициенты уравнения (5.1): $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j}, g_{i,j}, f_{i,j}$. В результате для каждого узла (i, j) получают разностное уравнение

$$L(u_{i,j}) = a_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + b_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + \\ + c_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + d_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} + g_{i,j} u_{i,j} = f_{i,j}.$$

Если узел (i, j) является граничным, $u_{i,j}$ равно значению функции $\varphi(x, y)$ в точке границы Γ , ближайшей к этому узлу.

Таким образом, для отыскания значений $u_{i,j}$ во внутренних узлах получают систему линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

Система разностных уравнений

$$L(u_{i,j}) = f_{i,j} \quad (i, j) \in W_h$$

с условием $u_{i,j}|_{W_h} = \varphi_{i,j}$ называется *разностной схемой краевой задачи* (5.1), (5.2).

Переход от краевой задачи (5.1), (5.2) к разностной схеме связан с заменой производных искомой функции разностными соотношениями (5.3). Эта замена может быть выполнена разными способами и с разной степенью точности. Порядок точности замены по формулам (5.3) будет $O(h^2)$.

При аппроксимации производных четвертого порядка используются формулы, имеющие порядок точности $O(h^2)$:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} &= \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h_x^4}; \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{i,j} &= \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{h_y^4}; \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - 2u_{i+1,j} - \\ &\quad - 2u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - 2u_{i,j-1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

На рис. 5.1 показана сеточная область D с границей Γ , где кружками изображены внутренние узлы сетки (множество W_h), а треугольниками — граничные узлы (множество W_h^*).

5.1.2. Разностная схема решения задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго и четвертого порядков

Задача Дирихле для уравнения Пуассона заключается в отыскании непрерывного в некоторой области D решения уравнения

$$-\Delta u = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y), \quad (5.5)$$

удовлетворяющего на границе этой области Γ краевому условию

$$u|_{\Gamma}=0. \quad (5.6)$$

Если область D задана в виде прямоугольника ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$), для получения разностной схемы для краевой задачи

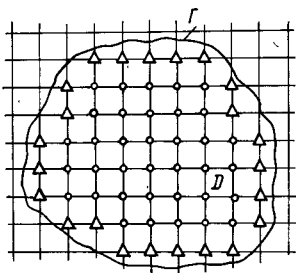


Рис. 5.1. Сеточная область

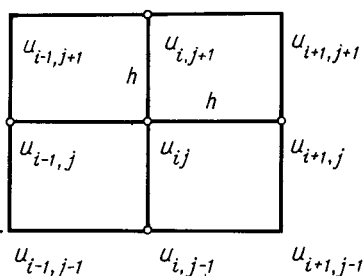


Рис. 5.2. Шаблон разностной схемы

(5.5), (5.6) нужно заменить производные в (5.5) соответствующими разностными отношениями (5.3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}.$$

При одинаковых шагах $h=1/n$ по осям x и y $x_i=ih$, $y_j=jh$, $f(x_i, y_j)=f_{i,j}$ и можно построить сетки: $W'_h\{(x_i, y_j); i, j=0, 1, \dots, n\}$ — множество, включающее внутренние и граничные узлы; W_h^* — множество узлов, лежащих на границе Γ ; $W_h=\{(x_i, y_j); i, j=1, 2, \dots, n-1\}$ — множество внутренних узлов.

Шаблон используемой разностной схемы изображен на рис. 5.2. Краевой задаче (5.5), (5.6) соответствует разностная схема

$$L(u_{i,j}) = f_{i,j}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (5.7)$$

$$u_{i,j}|_{W_h^*} = 0, \quad (5.8)$$

где

$$L(u_{i,j}) \equiv - \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}.$$

Решение краевой задачи, соответствующей разностной схеме (5.7), (5.8), находят методом последовательных приближений по схеме переменных направлений (см. § 5.1.3) или методом Гаусса. Разностная схема аппроксимирует соответствующую краевую задачу со вторым порядком точности относительно h .

Пример 5.1. Найти методом сеток решение задачи о равномерном свободном кручении призматического стержня квадратного поперечного сечения (рис. 5.3), т. е. решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона относительно функции

напряжений

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (\psi \in D)$$

при краевом условии $\psi=0$ на границе Γ области D , т. е. на контуре поперечного сечения стержня.

Разделим сечение стержня на четыре квадрата и пронумеруем узловые точки, как показано на рис. 5.3, а ($h=a$).

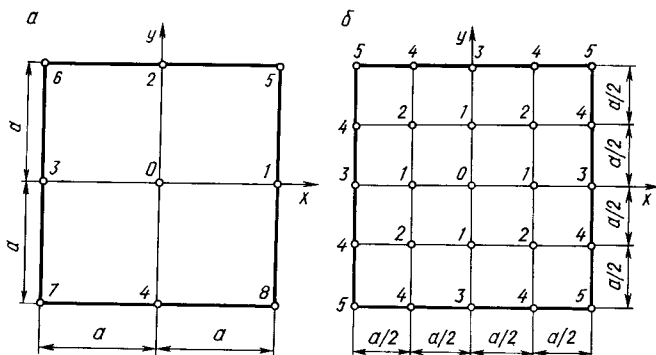


Рис. 5.3. К задаче о кручении призматического стержня квадратного поперечного сечения:

а — с 8 узловыми точками; б — с 16

Уравнение в конечных разностях, отвечающее исходному уравнению Пуассона в точке 0, будет $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = -2h^2$. Краевые условия ($\psi|_{\Gamma}=0$): $\psi_i=0$ ($i=1, 2, \dots, 8$).

Отсюда при $h=a$ имеем $-4\psi_0 = -2a^2$ или $\psi_0 = 0,5a^2$.

Производную $\partial\psi/\partial x$ в узловой точке 1 выразим через первую левую разность

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_1 = \frac{1}{h} (\psi_1 - \psi_0) = -0,5a.$$

Крутящий момент на торцах стержня при равномерном свободном кручении определяется зависимостью

$$M_k = 2G\theta' \iint_D \psi dx dy,$$

т. е. M_k равен удвоенному объему области, ограниченной поверхностью ψ . Этот объем можно вычислить по методу Симпсона (см. § 1.3.2):

$$M_k = 2G\theta' \frac{h^2}{9} 16\psi_0 = 1,778a^4 G\theta',$$

где GI_k — жесткость стержня при кручении ($I_k = 1,778a^4$).

Точное значение $M_k = 2,250a^4 G\theta'$ [15], следовательно, погрешность данного решения составляет 21%.

Для получения более точного решения разделим сечение стержня на 16 квадратов со стороной $h=a/2$ и пронумеруем узловые точки, как показано на рис. 5.3, б. Система разностных уравнений для точек 1, 2, 3 имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 4\psi_1 - 4\psi_0 &= 2\left(\frac{a}{2}\right)^2; \\ \psi_0 + 2\psi_2 + \psi_3 - 4\psi_1 &= -2\left(\frac{a}{2}\right)^2; \\ 2\psi_1 + 2\psi_4 - 4\psi_2 &= -2\left(\frac{a}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему с учетом того, что на контуре $\psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = 0$, получаем $\psi_0 = 0,5625a^2$, $\psi_1 = 0,4375a^2$, $\psi_2 = 0,3438a^2$.

Значение крутящего момента

$$M_k = 2G\theta' \iint_D \psi dx dy = 2G\theta' \frac{h^2}{9} 4(\psi_0 + 8\psi_1 + 16\psi_2) = 2,125a^4 G\theta'$$

уже только на 5,6% меньше точного его значения.

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка для аппроксимации производных используются формулы (5.4), откуда получается соответствующая разностная схема.

Пример 5.2. Найти методом сеток прогибы $w = w(x, y)$ тонкой квадратной плиты [76] со стороной a , цилиндрической жесткостью D , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Края плиты $x = \text{const}$ свободно оперты, а края $y = \text{const}$ жестко защемлены (рис. 5.4).

Для определения прогиба w следует решить краевую задачу для дифференциального уравнения изгиба тонкой плиты

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (5.9)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{при } x = \pm a/2; \\ w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = \pm a/2. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

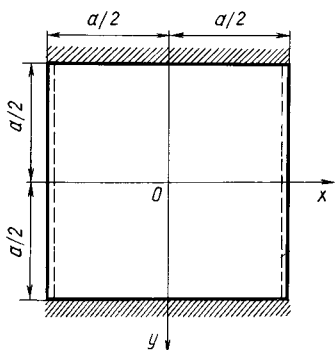


Рис. 5.4. К задаче об изгибе плиты

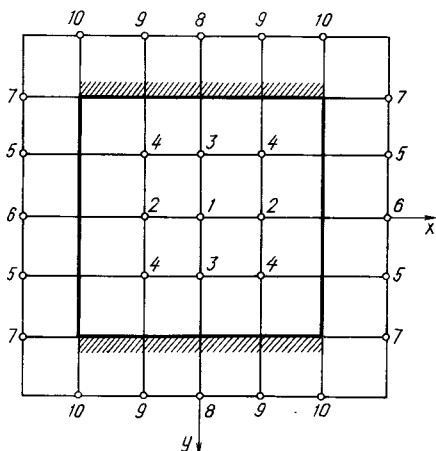


Рис. 5.5. Сеточная область для расчета плиты (см. рис. 5.4) методом сеток

Построим сеточную область, как показано на рис. 5.5 ($h_x = h_y = a/4$). Для рассматриваемой плиты прогибы в узлах сетки, симметрично расположенных относительно координатных осей, одинаковы, что позволяет сократить число неизвестных. Дополнительно к внутренним и граничным узлам сетки взят еще ряд закон-

турных узлов, которые войдут в разностные уравнения при аппроксимации дифференциального уравнения (5.9) и граничных условий (5.10). Согласно граничным условиям, прогибы на контуре плиты равны нулю и из разностных уравнений исключаются. Аппроксимация дифференциального уравнения (5.9) по формулам (5.4) дает систему уравнений

$$\begin{aligned} & \omega_{i+2,j} - 4\omega_{i+1,j} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i-1,j} + \omega_{i-2,j} + 2c(\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j-1} - \\ & - 2\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j+1} + 4\omega_{i,j} - 2\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1} + \omega_{i-1,j-1}) + \\ & + c^2(\omega_{i,j+2} - 4\omega_{i,j+1} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j-2}) = q_{i,j}h_x^4/D, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $c = h_x^2/h_y^2$; $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Система уравнений (5.11) при нумерации узлов, приведенной на рис. 5.5, и $h_x = h_y = a/4$ будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} 20\omega_1 - 16\omega_2 - 16\omega_3 + 8\omega_4 &= B; \\ -8\omega_1 + 21\omega_2 + 4\omega_3 - 16\omega_4 + \omega_6 &= B; \\ -8\omega_1 + 4\omega_2 + 21\omega_3 - 16\omega_4 + 8\omega_8 &= B; \\ 2\omega_1 - 8\omega_2 - 8\omega_3 + 22\omega_4 + \omega_5 + \omega_9 &= B, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

где $B = qa^4/(256D)$.

Запишем разностную аппроксимацию граничных условий (5.10). Граничное условие $\partial^2\omega/\partial x^2 = 0$ в узловых точках края плиты при $x = a/2$ приводит к соотношениям

$$\omega_2 + \omega_6 = 0; \quad \omega_4 + \omega_5 = 0; \quad \omega_7 = 0, \quad (5.13)$$

а граничное условие $\partial\omega/\partial y = 0$ в узловых точках края $y = a/2$ — к соотношениям:

$$\omega_3 - \omega_8 = 0; \quad \omega_4 - \omega_9 = 0; \quad \omega_{10} = 0. \quad (5.14)$$

Уравнения (5.12) — (5.14) представляют собой систему десяти алгебраических уравнений с десятью неизвестными ω_i , решение которой можно получить, например, методом Гаусса.

5.1.3. Метод переменных направлений (экономичная разностная схема)

Данный метод применяется для решения разностных уравнений, соответствующих задаче Дирихле для уравнения Пуассона или уравнению теплопроводности, когда искомая функция имеет две пространственные координаты x и y , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, t). \quad (5.15)$$

Пусть для этого уравнения на границе Γ области D задано условие

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (5.16)$$

которое включает как начальное условие $u(x, y, 0) = 0$, так и однородные краевые условия при $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Область D представляет собой в этом случае параллелепипед: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, поэтому в дополнение к сетке, рассмотренной в § 5.1.2, вводится слой по временной координате t : $t^k = k\tau$, где τ — шаг по переменной t . Тогда правая часть уравнения (5.15) будет $f_{i,j}^k = f(x_i, y_j, t^k)$.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} A_1(u_{i,j}^k) &= -\frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h^2}; \\ A_2(u_{i,j}^k) &= -\frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2}; \\ A(u_{i,j}^k) &= A_1(u_{i,j}^k) + A_2(u_{i,j}^k), \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

где A , A_1 , A_2 — разностные операторы, соответствующие оператору Лапласа.

Явная разностная схема ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, m$)

$$(u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1})/\tau + A(u_{i,j}^{k-1}) = f_{i,j}^{k-1} \quad (5.18)$$

устойчива при $\tau/h^2 \leq 1/4$.

Неявная разностная схема ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, m$)

$$(u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1})/\tau + A(u_{i,j}^k) = f_{i,j}^k \quad (5.19)$$

абсолютно устойчива, но на каждом слое $t^k = k\tau$ по времени требует решения системы $(n-1)^2$ уравнений.

Обе схемы (5.18) и (5.19) обладают существенными недостатками: в одной из них имеется жесткое ограничение на шаг по времени τ , а при применении другой требуется на каждом слое по времени решать систему уравнений со многими неизвестными.

Свободной от этих недостатков является схема переменных направлений или дробных шагов:

$$\frac{u_{i,j}^{k-1/2} - u_{i,j}^{k-1}}{\tau/2} + A_1(u_{i,j}^{k-1/2}) + A_2(u_{i,j}^{k-1}) = f_{i,j}^{k-1/2}; \quad (5.20)$$

$$\frac{u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1/2}}{\tau/2} + A_1(u_{i,j}^{k-1/2}) + A_2(u_{i,j}^k) = f_{i,j}^{k-1/2} \quad (5.21)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, m).$$

В разностной схеме (5.20), (5.21) шаг τ по времени делят на два полушага. Уравнение (5.20) отвечает первому полушагу; в нем величины $u_{i,j}^{k-1}$ и $A_2(u_{i,j}^{k-1})$ считаются уже известными, а неизвестные имеют верхний индекс $k-1/2$ (кроме правой части $f_{i,j}^{k-1/2}$, которая задана). Можно переписать разностное уравнение (5.20), предварительно умножив его на $-\tau/2$, следующим образом:

$$-\frac{\tau}{2h^2} u_{i-1,j}^{k-1/2} - \left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right) u_{i,j}^{k-1/2} + \frac{\tau}{2h^2} u_{i+1,j}^{k-1/2} = F_{i,j}^{k-1/2}, \quad (5.22)$$

где $F_{i,j}^{k-1/2} = (\tau/2) (A_2(u_{i,j}^{k-1}) - f_{i,j}^{k-1/2}) - u_{i,j}^{k-1}$ известны.

К разностному уравнению (5.22) необходимо добавить краевые условия:

$$u_{0,j}^{k-1/2} = 0; \quad u_{n,j}^{k-1} = 0. \quad (5.23)$$

Схема (5.22), (5.23) распадается на $n-1$ независимых точечных разностных схем, отвечающих фиксированному j ($1 \leq j \leq n-1$), и решается методом прогонки (см. § 2.2.1) при каждом j отдельно. Прогонка осуществляется по индексу i , т. е. в направлении оси Ox .

После того, как найдены все $u_{i,j}^{k-1/2}$ на промежуточном слое с номером $k-1/2$, их переносят в разностном уравнении (5.21) вправо. Это разностное уравнение теперь принимает вид

$$-\frac{\tau}{2h^2} u_{i,j-1}^k - \left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right) u_{i,j}^k + \frac{\tau}{2h^2} u_{i,j+1}^k = F_{i,j}^k, \quad (5.24)$$

где $F_{i,j}^k = (\tau/2) (A_1(u_{i,j}^{k-1/2}) - f_{i,j}^{k-1/2}) - u_{i,j}^{k-1/2}$ известны.

К уравнению (5.24) добавляются краевые условия:

$$u_{i,0}^k = 0; \quad u_{i,n}^k = 0. \quad (5.25)$$

Схема (5.24), (5.25) отвечает второму полушагу. Она также распадается на $n-1$ трехточечных разностных схем, отвечающих различным фиксированным i ($1 \leq i \leq n-1$). Каждая такая схема решается методом прогонки. Прогонка производится теперь уже по индексу j , т. е. в направлении оси Oy .

При решении задачи Дирихле приходят к разностной схеме

$$A(u_{i,j}) = f_{i,j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1); \quad u_{i,j}|_{W_n} = 0 \quad (5.26)$$

и применяют метод последовательных приближений по схеме переменных направлений (5.20), (5.21), где $f_{i,j}^{k-1/2} = f(x_i, y_j)$, а $u_{i,j}^0$ — произвольные величины.

Можно показать, что $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{i,j}^k = u_{i,j}$ при любых начальных приближениях $u_{i,j}^0$, причем наилучшая сходимость достигается при $\tau \approx h/\pi$.

5.2. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ)

5.2.1. Решение однородных дифференциальных уравнений в частных производных

В методе разделения переменных неизвестную функцию $u = u(x, y)$, зависящую от двух аргументов, представляют в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента.

Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны, которое представляет собой уравнение гиперболического типа относительно смещений точек струны $u = u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const}) \quad (5.27)$$

при начальных

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F(x) \quad (5.28)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0. \quad (5.29)$$

Частные решения уравнения (5.27), не равные тождественно нулю, представляют в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5.30)$$

удовлетворяющего граничным условиям (5.29). Подстановка (5.30) в исходное уравнение (5.27) дает

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.31)$$

Для того чтобы функция (5.30) была решением уравнения (5.27), равенство (5.31) должно соблюдаться при всех значениях независимых переменных x и t , откуда следует

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}. \quad (5.32)$$

Для удобства дальнейших выкладок постоянную λ принимают со знаком минус. Из (5.32) получают два дифференциальных уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad (5.33)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (5.34)$$

Функция (5.30) должна удовлетворять граничным условиям (5.29), т. е. $u|_{x=0}=X(0)T(t)=0$, $u|_{x=l}=X(l)T(t)=0$. Если $T(t) \neq 0$,

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \quad (5.35)$$

Следовательно, нужно найти такие значения λ , при которых существуют ненулевые решения уравнения (5.33), удовлетворяющие условиям (5.35). Если $\lambda \leq 0$, из (5.33) получается нулевое решение $X(x) \equiv 0$.

Пусть $\lambda > 0$. Характеристическое уравнение для (5.33) $k^2 + \lambda = 0$ имеет решение $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, и общее решение уравнения (5.33) примет вид $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$.

Постоянные C_1 и C_2 подбирают так, чтобы удовлетворялись граничные условия (5.35). При $x=0$ $C_1=0$. При $x=l$ $C_1=0$, $C_2 \sin \sqrt{\lambda}l=0$. Отсюда для ненулевого решения: $\sin \sqrt{\lambda}l=0$; $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, или $\lambda_n = (n\pi/l)^2$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Таким образом, каждому фиксированному n будет соответствовать решение

$$X_n(x) = A_n \sin(n\pi x/l), \quad (5.36)$$

где A_n — произвольная постоянная.

В (5.36) обычно принимают $n > 0$, так как при $n < 0$ получается то же решение (знак минус можно учитывать в A_n). Величины λ_n для данной задачи являются собственными значениями, а функции $\sin(n\pi x/l)$ — собственными функциями (см. § 2.4). Последние определяются с точностью до постоянного множителя.

Функция $T(t)$ определяется из уравнения (5.34). Каждому собственному значению λ_n соответствует своя функция $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + (n\pi a/l)^2 T_n(t) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = B_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t.$$

Таким образом, в соответствии с (5.30) каждому значению n соответствует частное решение исходного уравнения (5.27), удовлетворяющее граничным условиям (5.29):

$$u_n(x, t) = \left(B_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Если обозначить $B_n A_n = a_n$, $D_n A_n = b_n$, то

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Общее решение уравнения (5.27) может быть представлено в виде ряда, который сходится к функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (5.37)$$

Произвольные постоянные a_n и b_n определяют из начальных условий (5.28). Подстановка $t=0$ в (5.37) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Отсюда следует, что a_n — коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $[0, l]$, т. е.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (5.38)$$

Для определения b_n используется второе начальное условие (5.28). Дифференцирование (5.37) по t дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l};$$

при $t=0$ с учетом (5.28)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = F(x).$$

По аналогии с (5.38) можно получить

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (5.39)$$

Выражения (5.37) — (5.39) дают окончательное решение поставленной задачи методом Фурье.

Пример 5.3. Найти методом разделения переменных частоты свободных колебаний балки длиной l с шарнирным закреплением опор и постоянной жесткостью при изгибе, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q .

Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (5.40)$$

($a^2 = Elg/q$, g — ускорение свободного падения)
при начальных

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \quad (5.41)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0. \quad (5.42)$$

Решение ищем в виде (5.30). Выполнив операции (5.31), (5.32), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \lambda^2 T(t) = 0. \quad (5.44)$$

Решение уравнения (5.44):

$$T(t) = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t, \quad (5.45)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (5.41).

Решение уравнения (5.43) имеет вид

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx,$$

где $k^2 = \lambda/a$, а C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (5.42):

$$X(x) \Big|_{x=-l}^{x=0} = 0; \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \Big|_{x=0}^{x=l} = 0.$$

Исходя из граничных условий, получаем систему из четырех уравнений для определения постоянных C_i :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ C_1 - C_3 &= 0; \\ C_1 \operatorname{ch} kl + C_2 \operatorname{sh} kl + C_3 \cos kl + C_4 \sin kl &= 0; \\ C_1 \operatorname{ch} kl + C_2 \operatorname{sh} kl - C_3 \cos kl - C_4 \sin kl &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из первых двух уравнений следует $C_1 = C_3 = 0$, а последние два уравнения будут совместны лишь в случае, когда

$$\operatorname{sh} kl \cdot \sin kl = 0.$$

Здесь $\operatorname{sh} kl = 0$ только при $kl = 0$, а $\sin kl = 0$ при $kl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, т. е. вообще при

$$k_n = n\pi/l \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.46)$$

Отсюда следует $C_2 = 0$, а величина C_4 включается в постоянные A и B решения (5.45). Окончательное решение задачи получим в виде (5.37)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

откуда с учетом $k_n^2 = \lambda_n/a$ и (5.46) собственные значения, определяющие круговую частоту свободных колебаний заданной балки, $\lambda_n = (n^2 \pi^2 / l^2) (EIg/\rho)^{1/2}$.

Решение уравнений эллиптического типа также удобно находить методом Фурье.

Пусть требуется найти методом Фурье решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.47)$$

Первая краевая задача, относящаяся к уравнению Лапласа, есть задача Дирихле. Она формулируется так: найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в данной области D и принимающую на замкнутом контуре Γ , ограничивающем область D , заданные значения, т. е. $u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — заданная функция.

Пусть область D — прямоугольник со сторонами a и b (рис. 5.6). Граничные условия:

$$u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = b/2, \\ \varphi_2(x) & \text{при } y = -b/2, \\ \psi_1(y) & \text{при } x = 0, \\ \psi_2(y) & \text{при } x = a. \end{cases}$$

Решение этой задачи можно получить как сумму $u_1 + u_2$ двух более простых решений уравнения (5.47) при граничных условиях:

$$u_1 = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = b/2, \\ \varphi_2(x) & \text{при } y = -b/2, \\ 0 & \text{при } x = 0, x = a; \end{cases} \quad (5.48)$$

$$u_2 = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{при } x = 0, \\ \psi_2(y) & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } y = \pm b/2. \end{cases} \quad (5.49)$$

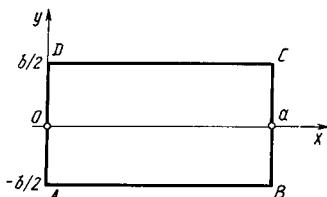


Рис. 5.6. Область интегрирования уравнения Лапласа

Обе задачи (5.47), (5.48) и (5.47) — (5.49) несущественно разнятся между собой, и решение одной из них может быть легко сведено к решению другой. Поэтому можно рассмотреть подробно лишь задачу нахождения функции u_1 . Прежде всего определяют частные решения уравнения (5.47)

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y), \quad (5.50)$$

не равные тождественно нулю и удовлетворяющие последнему из условий (5.48). Подстановка (5.50) в уравнение (5.47) дает

$$X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y) = -\lambda,$$

где λ — некоторая постоянная.

Функции $X(x)$ и $Y(y)$ определяют из уравнений

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (5.51)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0. \quad (5.52)$$

Функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям $X(0) = 0$, $X(a) = 0$. Ненулевые решения уравнения (5.51), удовлетворяющие этим условиям, имеют вид (5.36)

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ из (5.52) можно получить уравнение для определения $Y_n(y)$:

$$Y_n''(y) - (n\pi/a)^2 Y_n(y) = 0.$$

Его решение

$$Y_n(y) = \bar{B}_n e^{n\pi y/a} + \bar{D}_n e^{-n\pi y/a} = B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}.$$

Теперь частные решения

$$\bar{u}_n(x, y) = \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

где $a_n = A_n B_n$, $b_n = A_n D_n$ — произвольные постоянные.

Далее составляют ряд, аналогичный (5.37),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

который сходится к функции $u_1(x, y)$. Нетрудно показать, что функция

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (5.53)$$

является решением уравнения (5.47) и удовлетворяет последнему из граничных условий (5.48). Постоянные a_n и b_n определяют из первых двух условий (5.48):

$$\left. \begin{aligned} u_1|_{y=b/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \varphi_1(x); \\ u_1|_{y=-b/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \varphi_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

С другой стороны, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ можно представить в виде рядов по $\sin(n\pi x/a)$ в промежутке $[0, a]$:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a}; \quad (5.55)$$

$$\varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Сравнение коэффициентов рядов (5.54) и (5.55) приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} &= \alpha_n; \\ a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} &= \beta_n, \end{aligned} \right\}$$

из решения которой находят значения a_n и b_n . Подстановка этих значений в (5.53) дает окончательное решение для u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2 \operatorname{ch}((n\pi b)/(2a))} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_n - \beta_n}{2 \operatorname{sh}((n\pi b)/(2a))} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Для нахождения функции u_2 следует решить уравнение Лапласа (5.47) при условии (5.49). Преобразование координат по формулам: $x^* = y + b/2$, $y^* = x - a/2$ приводит эти условия к виду (5.48). Поэтому u_2 определяется решением (5.56), где меняются местами числа a и b , а место функций φ_1 и φ_2 занимают ψ_1 и ψ_2 . Полное решение поставленной задачи — функцию u — получают суммированием u_1 и u_2 .

5.2.2. Решение краевой задачи в одинарных тригонометрических рядах

Краевую задачу можно решать в одинарных тригонометрических рядах в том случае, когда оператор дифференциального уравнения и граничные условия задачи имеют четную кратность дифференцирования.

Пусть, например, задана краевая задача [82] для прямоугольной области D (рис. 5.7)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (5.57)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0. \quad (5.58)$$

Граничные условия при $y=0$, $y=b$ произвольные, но не содержащие функций от x .

В соответствии с методом разделения переменных фундаментальное решение однородного уравнения, соответствующего (5.57), представляют в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Из однородного уравнения, соответствующего (5.57), с учетом этого решения следует, что

$$X^{IV}(x)Y(y) + 2X''(x)Y''(y) + X(x)Y^{IV}(y) = 0. \quad (5.59)$$

Граничные условия (5.58) при этом будут:

$$X(x) \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0; \quad X''(x) \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0.$$

Кроме того, для $X(x)$ учитывают условия кратности дифференцирования $X''(x) = cX(x)$ или $X^{IV}(x) = cX''(x) = c^2X(x)$. Этим условиям удовлетворяют фундаментальные функции

$$X_m(x) = \sin \alpha_m x, \quad (5.60)$$

где $\alpha_m = m\pi/a$ ($m = 1, 2, \dots$).

Подстановка функций (5.60) в уравнение (5.59) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $Y(y)$:

$$Y^{VI}(y) - 2\alpha_m^2 Y''(y) + \alpha_m^4 Y(y) = 0.$$

Общее решение этого уравнения содержит четыре постоянных интегрирования, которые определяют из граничных условий для $u(x, y)$ при $y=0$ и $y=b$. Общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному (5.57), имеет вид

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \alpha_m x.$$

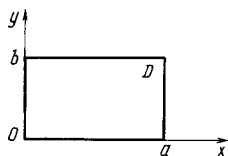


Рис. 5.7. Область D для краевой задачи (5.57), (5.58)

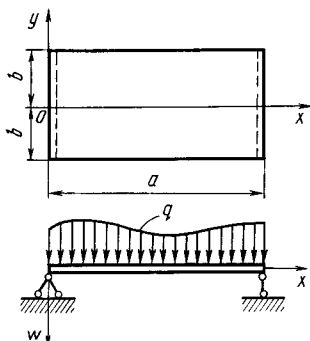


Рис. 5.8. Изгиб прямоугольной плиты под действием распределенной нагрузки (к решению в одинарных тригонометрических рядах)

К нему для окончательного решения задачи следует прибавить частное решение уравнения (5.57).

Пример 5.4. Найти прогиб $w=w(x, y)$ прямоугольной тонкой плиты с цилиндрической жесткостью D , загруженной произвольно распределенной нагрузкой интенсивности $q(x, y)$, при шарнирном опирании двух противоположных краев и произвольно закрепленных двух других краев (рис. 5.8).

Определение прогиба плиты сводится к решению краевой задачи для уравнения изгиба тонкой плиты

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (5.61)$$

при граничных условиях:

$$w \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0. \quad (5.62)$$

При $y=\pm b$ граничные условия могут быть любыми, но не зависящими от аргумента x .

Решение задачи (5.61), (5.62) ищем в виде одинарного тригонометрического ряда, удовлетворяющего заданным граничным условиям (решение Леви):

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin (m\pi x/a). \quad (5.63)$$

Подставляя (5.63) в уравнение (5.61), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(f_m^{IV}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (5.64)$$

Функцию нагрузки $q(x, y)$ в (5.64) также представим в виде ряда Фурье по координате x :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin(m\pi x/a), \quad (5.65)$$

где значения $q_m(y)$ определяются по формуле для коэффициентов ряда Фурье

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin(m\pi x/a) dx.$$

Подставляя (5.65) в (5.64) и приравнявая множители при одинаковых тригонометрических функциях в правой и левой частях полученного выражения, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 f_m(y) = \frac{q_m(y)}{D} \quad (5.66)$$

($m = 1, 2, \dots$)

с теми же граничными условиями для $f_m(y)$ при $y = \pm b$, что и для функции w .

Общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5.66),

$$f_m^0(y) = B_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m y + B_{2m} \operatorname{sh} \alpha_m y + B_{3m} y \operatorname{ch} \alpha_m y + B_{4m} y \operatorname{sh} \alpha_m y,$$

где $\alpha_m = m\pi/a$ ($i = 1, 2, \dots$).

Частное решение $f_m(y)$ неоднородного уравнения (5.66) можно найти любым из известных способов. Все решения уравнения (5.66) имеют вид $f_m(y) = \bar{f}_m^0(y) + \bar{f}_m(y)$, а решение поставленной задачи определяется подстановкой значений $f_m(y)$ в ряд (5.63).

5.2.3. Решение краевой задачи в двойных тригонометрических рядах

Решение двумерной задачи для неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных производных можно найти, разделяя переменные с помощью двойных тригонометрических рядов. В этом случае так же, как и при использовании одинарных рядов, дифференциальные операторы уравнения и граничных условий должны быть четной кратности. Применение двойных тригонометрических рядов удобно рассмотреть на примере решения задачи об изгибе тонкой плиты прямоугольной формы (решение Навье).

Требуется определить прогибы $w = w(x, y)$ тонкой плиты (рис. 5.9), изгиб которой при произвольной нагрузке $q(x, y)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (5.67)$$

Граничные условия при шарнирном опирании всех краев плиты имеют вид:

$$w \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0; \quad w \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0. \quad (5.68)$$

Решение краевой задачи (5.67), (5.68) представляют в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.69)$$

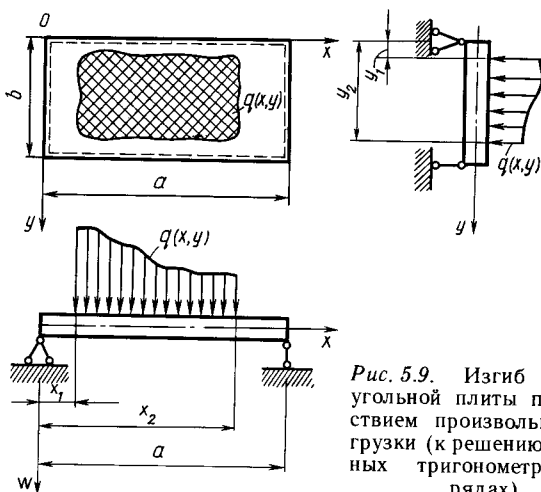


Рис. 5.9. Изгиб прямоугольной плиты под действием произвольной нагрузки (к решению в двойных тригонометрических рядах)

Это решение удовлетворяет граничным условиям (5.68). Оно также удовлетворяет уравнению (5.67) при некоторых значениях постоянных A_{mn} , которые определяются подстановкой (5.69) в уравнение (5.67):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (5.70)$$

Таким образом, левая часть исходного уравнения (5.67) представлена в виде ряда Фурье по синусам. Аналогично можно представить и правую часть, т. е. функцию нагрузки

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Это выражение подставляют в (5.70)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \\ &= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

приравнивают коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в правой и левой частях полученного равенства и получают

$$C_{mn} = D\pi^4 A_{mn} (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2. \quad (5.71)$$

С другой стороны, формула для определения коэффициентов ряда Фурье для $q(x, y)$ имеет вид

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

где для интеграла можно ввести обозначение

$$K_{mn} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (5.72)$$

Тогда $C_{mn} = 4K_{mn}/(ab)$.

С учетом этого выражения для C_{mn} из (5.71) можно получить формулу для определения значений постоянных

$$A_{mn} = \frac{4K_{mn}}{abD\pi^4 (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2},$$

и искомое решение (5.69) принимает вид

$$w(x, y) = \frac{4}{abD\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{mn}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.73)$$

После определения прогибов w изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы в плите находят по известным соотношениям теории тонких плит.

Двойной интеграл нетрудно вычислить для конкретно заданной нагрузки. Например, для нагрузки, равномерно распределенной по некоторой прямоугольной области со сторонами, параллельными осям x и y (рис. 5.10), $q = \text{const}$, $x_1 = c$, $x_2 = c + \Delta x$, $y_1 = d$, $y_2 = d + \Delta y$, а из (5.72) следует, что

$$\begin{aligned} K_{mn} &= q \int_c^{c+\Delta x} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_d^{d+\Delta y} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \\ &= \frac{qab}{m\pi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \Big|_c^{c+\Delta x} \cos \frac{n\pi y}{b} \Big|_d^{d+\Delta y}. \end{aligned}$$

После подстановки пределов интегрирования и тригонометрических преобразований

$$\begin{aligned} K_{mn} &= \frac{4qab}{m\pi^2} \left(\sin \frac{m\pi\Delta x}{2a} \sin \frac{m\pi}{a} \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \times \\ &\times \left(\sin \frac{n\pi\Delta y}{2b} \sin \frac{n\pi}{b} \left(d + \frac{\Delta y}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Пример 5.5. Определить прогиб в центре прямоугольной шарнирно опертой по краям плиты, загруженной нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности плиты.

Используем изложенное выше решение Навье. В этом случае для области загрузки: $c=d=0$, $\Delta x=a$, $\Delta y=b$. По (5.74)

$$K_{mn} = \frac{4qab}{mnp^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{2},$$

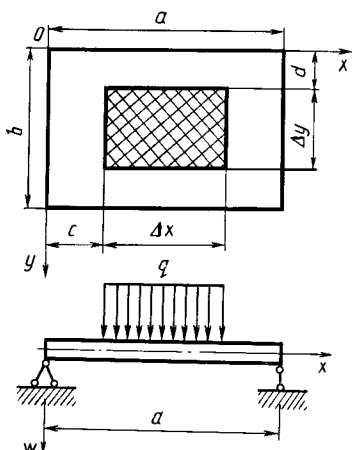


Рис. 5.10. Плита, загруженная равномерно распределенной по прямоугольной области нагрузкой

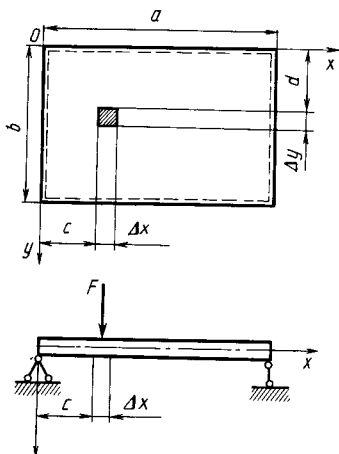


Рис. 5.11. Плита, загруженная сосредоточенной нагрузкой

откуда видно, что при четных m, n $K_{mn}=0$, при нечетных — $\sin^2(m\pi/2) \sin^2(n\pi/2) = 1$. Подставляя значение K_{mn} при $m, n=1, 3, \dots$ в (5.73), получаем

$$w(x, y) = \frac{16qa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{mn(m^2 + a^2 n^2/b^2)^2}.$$

Для того чтобы получить достаточно точный результат, в этом решении можно сохранить только один член двойного ряда ($m=n=1$). В этом случае при $a=b$ в центре плиты ($x=a/2, y=b/2$) прогиб $w_{\max} = 4qa^4/(D\pi^6)$. Сохранение двух членов разложения ($m=n=1, 2$) дает поправку к этому результату, не превышающую 3%.

Пример 5.6. Определить выражение для прогибов $w(x, y)$ прямоугольной плиты, загруженной сосредоточенной нагрузкой F .

Представим нагрузку F в виде распределенной на малой площади $\Delta x \cdot \Delta y$ (рис. 5.11), т. е. при $\Delta x \ll a, c, \Delta y \ll b, d, q = F/(\Delta x \cdot \Delta y)$.

Определяем K_{mn} , учитывая, что синус малого угла приближенно можно принять равным углу, т. е. $\sin((m\pi\Delta x)/(2a)) \approx m\pi\Delta x/(2a)$; $\sin((n\pi\Delta y)/(2b)) \approx n\pi\Delta y/(2b)$. Отсюда по (5.74) $K_{mn} = F \sin(m\pi c/a) \cdot \sin(n\pi d/b)$. Подставляя это значение K_{mn} в (5.73), получаем искомое решение

$$w(x, y) = \frac{4F}{abD\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi c/a) \cdot \sin(n\pi d/b)}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Алгоритм вычислений значений прогибов при заданных x и y в приведенных выше примерах весьма прост и состоит в формировании исходных данных и использовании формул для $w(x, y)$. При этом в случае сосредоточенной нагрузки двойные ряды сходятся медленнее, чем при распределенной, и поэтому приходится сохранять в решении большее число членов ряда.

5.3. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ НЕВЯЗКИ

5.3.1. Общие положения метода

В случае приближенного решения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных

$$L(u) = f(x, y) \quad (u \in D) \quad (5.75)$$

при граничных условиях

$$R(u)|_{\Gamma} = 0 \quad (5.76)$$

(L — линейный дифференциальный оператор; D — область задания функции $u(x, y)$; Γ — граница этой области) можно поступить следующим образом.

В области D выбирают систему линейно независимых гладких функций $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, ..., $\varphi_n(x, y)$, которые называются *базисными* или *аппроксимирующими*. Каждая из этих функций удовлетворяет краевым условиям (5.76). Решение задачи находят в виде линейной комбинации базисных функций

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y), \quad (5.77)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — неизвестные коэффициенты. Функции $u_n(x, y)$ также должны удовлетворять условиям (5.76).

При подстановке $u_n(x, y)$ по (5.77) в уравнение (5.75) получится так называемая невязка

$$\psi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = L(u_n) - f(x, y). \quad (5.78)$$

Если бы при некотором выборе коэффициентов a_k выполнялось условие $\psi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv 0$, функция $u_n(x, y)$ являлась бы точным решением краевой задачи (5.75), (5.76). Однако такие значения коэффициентов a_k выбрать невозможно. Поэтому подбирают a_k так, чтобы невязка ψ была возможно меньше. Существует несколько методов минимизации невязки, которые отличаются способом нахождения коэффициентов a_k .

5.3.2. Метод коллокаций

Для решения краевой задачи (5.75), (5.76) методом коллокаций в заданной области D фиксируют n точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, называемых *точками коллокации* (коллокация означает размещение). Для того

5.3.4. Метод Бубнова — Галеркина

В основе метода лежит требование ортогональности базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ к невязке (5.78)

$$\iint_D \psi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) \varphi_i(x, y) dx dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.83)$$

(Если невязка равна нулю, она ортогональна к любой функции $\varphi_k(x, y)$).

Требование (5.83) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ для приближенного решения (5.77) краевой задачи (5.75), (5.76):

$$\left. \begin{aligned} a_1(L(\varphi_1), \varphi_1) + \dots + a_n(L(\varphi_n), \varphi_1) &= (f - L(\varphi_0), \varphi_1); \\ a_1(L(\varphi_1), \varphi_2) + \dots + a_n(L(\varphi_n), \varphi_2) &= (f - L(\varphi_0), \varphi_2); \\ &\vdots \\ a_1(L(\varphi_1), \varphi_n) + \dots + a_n(L(\varphi_n), \varphi_n) &= (f - L(\varphi_0), \varphi_n), \end{aligned} \right\}$$

где $(L(\varphi_i), \varphi_k) = \iint_D L(\varphi_i) \varphi_k dx dy$ — скалярное произведение функций $L(\varphi_i)$ и φ_k .

Пример 5.8. Найти решение краевой задачи о равномерном свободном кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения (рис. 5.13).

Задача сводится к решению уравнения Пуассона для функции напряжений $\psi = \psi(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2 \quad (\psi \in D) \quad (5.84)$$

при краевых условиях на контуре Γ поперечного сечения стержня

$$\psi|_{\Gamma} = 0. \quad (5.85)$$

Для решения задачи методом Бубнова — Галеркина принимаем $\psi_n = (a^2 - x^2) \times (b^2 - y^2) (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \dots)$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям (5.85). При $n=1$ имеем

$$\psi_1(x, y) = a_1 (a^2 - x^2) (b^2 - y^2). \quad (5.86)$$

Подставляем это приближенное значение $\psi_1(x, y)$ в исходное уравнение (5.84), откуда получаем невязку $\varphi = -2a_1(a^2 - x^2) - 2a_1(b^2 - y^2) + 2$.

Коэффициент a_1 найдем из условия ортогональности базисных функций и невязки, т. е.

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b (-2a_1(a^2 - x^2) - 2a_1(b^2 - y^2) + 2) \times \\ \times (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) dx dy = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{16}{45} a_1 a^3 b^3 (a^2 + b^2) - \frac{4}{9} a^3 b^3 = 0,$$

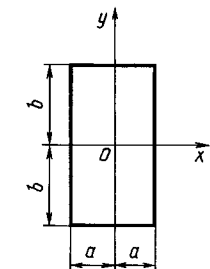


Рис. 5.13. Поперечное сечение призматического стержня

откуда $a_1 = 5/(4(a^2 + b^2))$. Из (5.86) получаем приближенное решение краевой задачи (5.84), (5.85) при $n=1$:

$$\psi_1(x, y) = \frac{5}{4} \frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}.$$

Исходя из известного выражения для крутящего момента M_k при равномерном свободном кручении призматического стержня $M_k = 2G\theta' \iint_D \psi dx dy$, найдем его приближенное значение при $\psi(x, y) \approx \psi_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_k &\approx 2G\theta' \iint_D \psi_1 dx dy = 2G\theta' \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{5}{4} \frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2} dx dy = \\ &= \frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} G\theta'. \end{aligned}$$

В частности, для квадратного сечения ($a=b$) $M_k = 2,222a^4 G\theta'$, что всего на 1,3 % меньше точного значения (см. пример 5.1).

5.3.5. Метод наилучших произведений

Суть метода состоит в последовательной минимизации невязки путем добавления на каждом шаге одного члена разложения искомого решения $u_n(x, y)$ в ряд по аппроксимирующим функциям $\varphi_j(x, y)$. На каждом шаге в связи с этим получается одночленная аппроксимация искомой функции и, следовательно, только один неизвестный параметр c_j :

$$u_j(x, y) = c_j \varphi_j(x, y) + \Phi_j(x, y),$$

где j — номер приближения.

При $j=1$ $\Phi_j=0$; $j=2$ $\Phi_j=c_1\varphi_1(x, y)$; $j=3$ $\Phi_j=c_1\varphi_1(x, y) + c_2\varphi_2(x, y)$; ... $j=n$ $\Phi_j = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i(x, y)$.

Процесс заканчивается, когда очередная поправка решения $c_k \varphi_k(x, y)$ будет мала. Коэффициенты c_j находят из условия

$$\iint_D (L(u_j) - f) \varphi_j(x, y) dx dy = 0. \quad (5.87)$$

На каждом шаге это уравнение содержит только одну неизвестную c_j . Все другие коэффициенты при аппроксимирующих функциях определены выше.

Пример 5.9. Используя метод наилучших произведений, найти в области D решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

при граничном условии $u|_{\Gamma}=0$, где Γ — граница области D ($-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$).

В качестве аппроксимирующих функций $\varphi_i(x, y)$ примем последовательность:

$$\varphi_1(x, y) = (1-x^2)(1-y^2); \quad \varphi_2(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)x^2; \quad \varphi_3(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)y^2;$$

$$\varphi_4(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)x^4; \quad \varphi_5(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)y^4 \text{ и т. д.}$$

Начало процесса: $u_1 = c_1 \varphi_1(x, y) = c_1(1-x^2)(1-y^2)$.

Для определения c_1 имеем из (5.87) уравнение

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2 \right) (1-x^2)(1-y^2) dx dy = 0.$$

После вычисления интегралов получим $c_1 = 5/8$. Далее принимаем $u_2 = c_2 \varphi_2(x, y) + (5/8)(1-x^2)(1-y^2) = c_2(x^2-x^4)(1-y^2) + (5/8)(1-x^2)(1-y^2)$.

Для определения c_2 имеем уравнение

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2 \right) (x^2-x^4)(1-y^2) dx dy = 0.$$

После вычисления интегралов получим $c_2 = 15/(4 \cdot 38)$. Наконец, $u_3 = c_3 \varphi_3(x, y) + (5/8)(1-x^2)(1-y^2) + (15/(4 \cdot 38))(x^2-x^4)(1-y^2) = c_3(1-x^2)(y^2-y^4) + (5/8) \times \times (1-x^2)(1-y^2) + (15/(4 \cdot 38))(x^2-x^4)(1-y^2)$.

Аналогично, для определения c_3 используется уравнение

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + 2 \right) (1-x^2)(y^2-y^4) dx dy = 0.$$

После вычисления интегралов находим $c_3 = 30/19^2$.

Закачивая на этом процесс минимизации невязки, получаем приближенное решение поставленной задачи:

$$u \approx \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{8 \cdot 19} x^2 + \frac{30}{19^2} y^2 \right) (1-x^2)(1-y^2).$$

5.4. МЕТОДЫ СВЕДЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ОДНОМЕРНЫМ

5.4.1. Метод прямых

Пусть в прямоугольной области D ($a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$) требуется найти решение дифференциального уравнения в частных производных

$$L(u(x, y)) = f(x, y), \quad (5.88)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, c) &= \varphi_0(x); \quad u(x, d) = \varphi_1(x); \\ u(a, y) &= \psi_0(y); \quad u(b, y) = \psi_1(y), \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

где $L(u)$ — дифференциальный оператор; $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$ — заданные функции.

На отрезке $[c, d]$ выбирают систему точек $y_k = y_0 + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $y_0 = c$, $y_n = d$ и проводят прямые $y = y_k$. В уравнении (5.88) принимают $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и производные по y заменяют

разностными отношениями типа

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_k} = \frac{1}{2h} (u_{k+1}(x) - u_{k-1}(x));$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y_k} = \frac{1}{h^2} (u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)),$$

.

где $u_k(x) = u(x, y_k)$. В результате получают систему $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями в виде

$$u_0(x) = \varphi_0(x); \quad u_n(x) = \varphi_1(x); \quad u_k(a) = \psi_0(y_k); \quad u_k(b) = \psi_1(y_k).$$

Этот метод удобно применять, когда коэффициенты уравнения (5.88) не зависят от x . В этом случае получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, если при использовании прямоугольной сетки шаг ее по оси x стремится к нулю.

Пример 5.10. Используя метод прямых, свести решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

в области D ($a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$) с граничными условиями (5.89) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Используя разностное отношение для производной

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y_k} = \frac{1}{h^2} (u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)),$$

получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$u_k''(x) + \frac{1}{h^2} (u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)) = f_k(x)$$

при граничных условиях $u_k(a) = \psi_0(y_k)$, $u_k(b) = \psi_1(y_k)$, $u_0(x) = \varphi_0(x)$, $u_n(x) = \varphi_1(x)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Общее решение этой системы уравнений известно:

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sin \frac{\pi i (y_k - c)}{d - c} (A_i e^{\delta_i x} + B_i e^{-\delta_i x}),$$

где $\delta_i = (2/h) \sin(\pi(y_i - c)/(2(d - c)))$, а A_i и B_i — произвольные постоянные.

5.4.2. Метод Власова — Канторовича

В основу данного метода сведения краевых задач для уравнений в частных производных к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений положена та же идея, что и в методе минимизации невязки (см. § 5.3). Отличие состоит лишь в форме

задания приближенного выражения для искомой функции нескольких переменных $u(x, y)$. В методе минимизации невязки искомую функцию представляют в виде (5.77), где в качестве коэффициентов при аппроксимирующих функциях $\varphi_k(x, y)$ принимают неизвестные постоянные, которые определяют из соответствующих для конкретного метода (коллокаций, Бубнова — Галеркина и др.) систем алгебраических уравнений. В методе Власова — Канторовича роль этих коэффициентов играют неизвестные функции одной из независимых переменных, которые определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Этот метод дает более точное решение, чем методы, в которых задача сводится к решению систем алгебраических уравнений. Сущность метода Власова — Канторовича состоит в следующем.

Решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения в частных производных (5.88) при заданных граничных условиях (5.89) находят в виде

$$u_n(x, y) = Y_0(y) + \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y), \quad (5.90)$$

где $X_k(x)$ — неизвестная функция переменной x , удовлетворяющая граничным условиям (5.89) по x ; $Y_0(y)$, $Y_k(y)$ — известные функции переменной y , удовлетворяющие граничным условиям по y ($Y_0(y)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям, а $Y_k(y)$ — однородным).

Для нахождения функции $X_k(x)$ составляют условие ортогональности невязки и функции $\{Y_k(y)\}$:

$$\int_c^d (L(u_n(y, y)) - f(x, y)) Y_k(y) dy = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (5.91)$$

из которого в результате интегрирования получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $X_k(x)$.

Пример 5.11. Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1$$

в прямоугольной области D ($-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$) при условии $u|_{\Gamma} = 0$, где Γ — граница области D .

Решение находим методом Власова — Канторовича, представив неизвестную функцию в виде (5.91) при $Y_0(y) = 0$ и $k=1$:

$$u_1 = Y_1(y) X_1(x) = (b^2 - y^2) X(x). \quad (5.92)$$

Система (5.91) приводится к уравнению

$$\int_{-b}^b (X''(x) (b^2 - y^2) (-2X(x)) + 1) (b^2 - y^2) dy = 0.$$

После вычисления определенного интеграла по переменной y получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) - \frac{5}{2b^2} X(x) = -\frac{5}{4b^2},$$

которое имеет решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям:

$$X(x) = -\frac{1}{4 \operatorname{ch} x^{a\sqrt{2,5}/b}} (e^{x\sqrt{2,5}/b} + e^{-x\sqrt{2,5}/b}) + \frac{1}{2}.$$

Подставляя это выражение в (5.92), находим функцию

$$u_1 = (b^2 - y^2) \left(-\frac{1}{4 \operatorname{ch} x^{a\sqrt{2,5}/b}} (e^{x\sqrt{2,5}/b} + e^{-x\sqrt{2,5}/b}) + \frac{1}{2} \right),$$

которая определяет приближенное решение поставленной задачи.

6. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ), являющийся одним из современных эффективных численных методов решения задач строительной механики на ЭВМ, широко используется для расчета сложных нерегулярных конструкций. С помощью МКЭ удается достаточно точно учесть в расчете разнообразные геометрические формы конструкций, а также всевозможные распределения в пространстве и времени внешних воздействий.

Основная идея МКЭ заключается в специфической дискретизации исходной стержневой или континуальной системы. Заданная конструкция условно расчленяется с помощью некоторой сетки на отдельные (обычно малые) фрагменты конечных размеров, называемые конечными элементами. Деформированное состояние элементов подбирается так, чтобы оно выражало реальное поведение среды в месте их расположения.

Сетка назначается с учетом геометрических и структурных характеристик конструкции. На выбор сетки оказывает влияние стремление к уменьшению трудоемкости процесса расчета при сохранении достаточной точности его результатов.

После выбора дискретной расчетной схемы ее можно рассчитать на основе любого из методов строительной механики (методом сил, перемещений или смешанным). Ниже МКЭ излагается на основе наиболее распространенного метода перемещений.

Модификацией МКЭ, применяемой для решения особо сложных задач строительной механики, является метод суперэлементов. Для практической реализации МКЭ имеется достаточно распространенное программное обеспечение в виде программных комплексов «ЛИРА», «СУПЕР-ЕС», «КАСКАД» и др.

6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МКЭ

6.1.1. Дискретизация конструкций с помощью конечных элементов

Выбор формы конечного элемента зависит от многих факторов, но в первую очередь от формы и размерности заданной системы. В основу расчленения конструкции на конечные элементы положено требование обеспечения идентичности в поведении конструкции и ее дискретной модели.

При решении одномерных задач строительной механики, связанных с расчетом стержневых систем, конструкцию разбивают на

одномерные конечные элементы в виде прямоугольных стержней постоянного сечения (рис. 6.1, а). Например, для плоской формы с шарнирными узлами (рис. 6.2), стержни которой работают только на сжатие или растяжение, в качестве конечных элементов выбирают отдельные стержни, а основными неизвестными являются линейные перемещения узловых точек. В этом случае дискретная модель

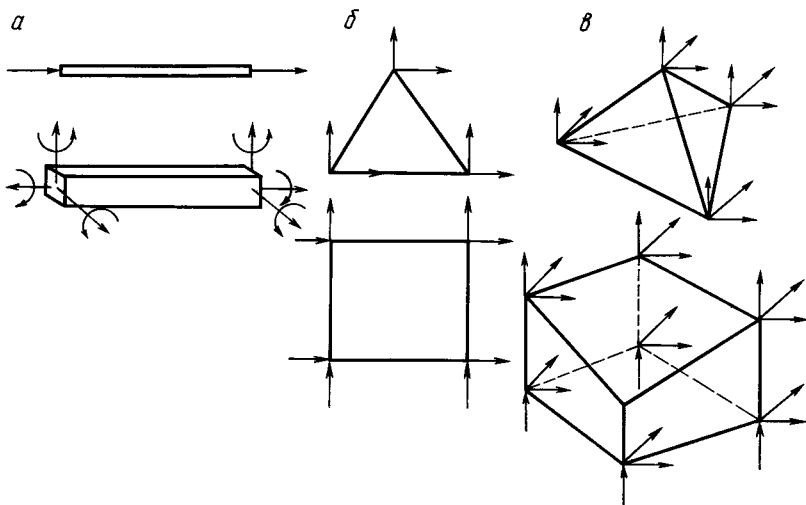


Рис. 6.1. Основные типы конечных элементов:
а — для одномерной области; б — для двумерной; в — для трехмерной

полностью соответствует заданной конструкции, а результаты расчета получаются более достоверными.

В двумерных задачах строительной механики, связанных с расчетом, например, пластин или оболочек, чаще всего используют треугольные или прямоугольные конечные элементы (рис. 6.1, б). Деление на прямоугольники дает более точный результат при одном и том же числе основных неизвестных. Однако треугольная разбивка является более универсальной, она предусмотрена в большинстве программных комплексов. Треугольная разбивка позволяет также описывать более полно области с криволинейным контуром (рис. 6.3) и изменять размеры конечных элементов, уменьшая их в местах концентрации напряжений [51]. Основными неизвестными МКЭ для конечного элемента в виде треугольной или прямоугольной пластины являются узловые перемещения, т. е. линейные перемещения и углы поворотов узловых точек.

При решении трехмерных задач используются объемные конечные элементы в виде тетраэдра или параллелепипеда (рис. 6.1, в).

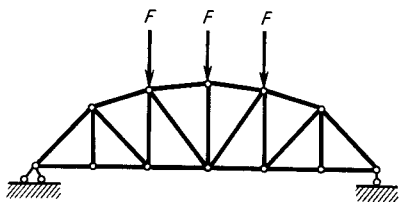


Рис. 6.2. Плоская ферма с шарнирными узлами

Четких рекомендаций по выбору формы и количества конечных элементов в общем случае нет. Оптимальный их выбор требует определенного навыка, а во многих случаях определяется наличием соответствующего программного обеспечения.

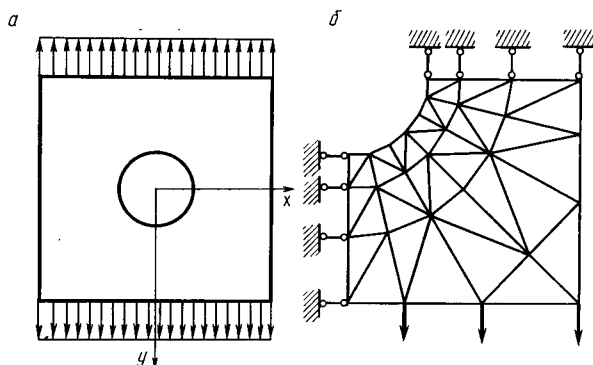


Рис. 6.3. Схема разбивки пластины с круглым отверстием на треугольные конечные элементы:

a - заданная конструкция; *б* — расчетная схема ее четверти

В гл. 7 МКЭ трактуется как частный случай вариационного метода Ритца (см. § 7.4.4).

6.1.2. Основное отличие МКЭ от метода перемещений

Матричная форма метода перемещений, изложенная в § 3.2, в приложении к расчету стержневых систем полностью отвечает методу конечных элементов. Однако расчет систем континуальных (типа пластин и оболочек) встречает некоторые трудности. Части из них удастся избежать и сделать расчет более универсальным, если при выборе матрицы жесткости учесть еще перемещения элемента как твердого тела.

Пример 6.1. Определить изгибающие моменты M_i и поперечные силы Q_i в расчетных сечениях рамы при заданной нагрузке (рис. 6.4, *a*).

Выполним расчет методом перемещений. Основная система (рис. 6.4, *б*) образована постановкой дополнительной связи в узле, препятствующей повороту этого узла. Матрицы жесткости стержней *A* и *B* приведены в (3.10).

$$r_A = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad r_B = \frac{3EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости необъединенных элементов и углов поворота концов стержней при $Z_1 = 1$:

$$k = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Реакцию в дополнительной связи от нагрузки M находим из уравнения равновесия системы: $r_{1F} = -M = R_0$. Матрица S_F^0 — нулевая. Из (3.7) после подстановки

матриц k , a и R_0 получим

$$S_F = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{M}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

На рис. 6.5 изображены эпюры моментов M_F и поперечных сил Q_F^* .

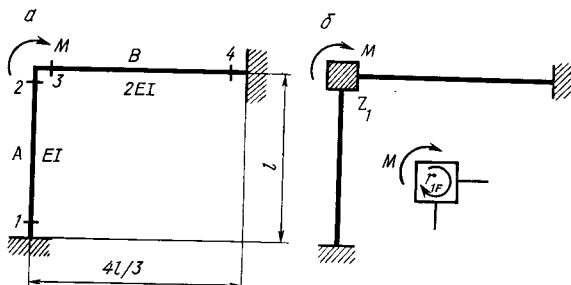


Рис. 6.4. Расчет рамы в матричной форме:

a — заданная система; b — основная система метода перемещений

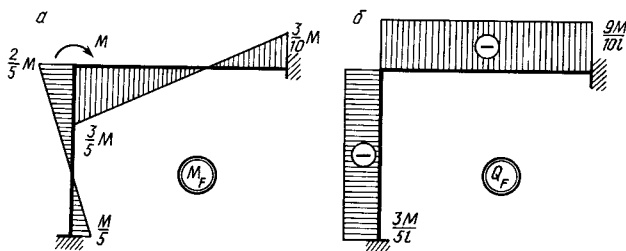


Рис. 6.5. Результаты расчета рамы, показанной на рис. 6.4:

a — эпюра изгибающих моментов; b — эпюра поперечных сил

Выполненный выше расчет можно считать расчетом МКЭ, где роль конечных элементов исполняли стержни A и B с соответствующими матрицами жесткости (3.10). Однако с общих позиций МКЭ целесообразно учесть еще перемещения элемента как твердого тела. Тогда, если не учитывать продольных деформаций, каждый конец стержня рамы будет иметь две степени свободы: смещение, перпендикулярное к оси стержня, и поворот. Следовательно, матрица жесткости одного элемента (стержня) будет четвертого порядка.

На рис. 6.6 приведены определенные по прил. 1 изгибающие моменты и поперечные силы в стержне при единичных перемещениях его концов. Их значения можно представить в виде матрицы

* Здесь и далее, за исключением особо оговоренных случаев, моменты в кило-ньютон-метрах, поперечные силы — в килоньютонах.

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & 2 & -\frac{3}{l} & 1 \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & 1 & -\frac{3}{l} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ \frac{dZ_i}{dx} \\ Z_j \\ \frac{dZ_j}{dx} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Здесь средняя матрица и является матрицей жесткости прямолинейного стержня постоянного сечения, изображенного на рис. 6.6. В ней положительными считаются те элементы, которые вращают выделенный стержень по ходу часовой стрелки. Матрица жесткости в (6.1) является особенной. В отличие от (3.10) она обратной матрицы не имеет.

Процедура расчета остается как в (3.8), но размеры исходных матриц k и a увеличиваются в данном случае в два раза. Основная система и R_0 остаются прежними.

Матрица жесткости

$$k = \begin{bmatrix} r_A & 0 \\ 0 & r_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{l^2} & -\frac{9}{l} & \frac{18}{l^2} & -\frac{9}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{l} & 6 & -\frac{9}{l} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{l^2} & -\frac{9}{l} & \frac{18}{l^2} & -\frac{9}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{l} & 3 & -\frac{9}{l} & 6 \end{bmatrix};$$

$$a = \begin{bmatrix} a_A \\ a_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При построении матрицы $\mathbf{a}$ в гл. 3 линейное смещение представлено через углы поворота. Здесь же для каждого линейного смещения вводится дополнительная строка.

Подстановка матриц $\mathbf{k}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}_0$ в (3.8) дает одновременно значения изгибающих моментов и поперечных сил в расчетных сечениях, которые приведены на рис. 6.5.

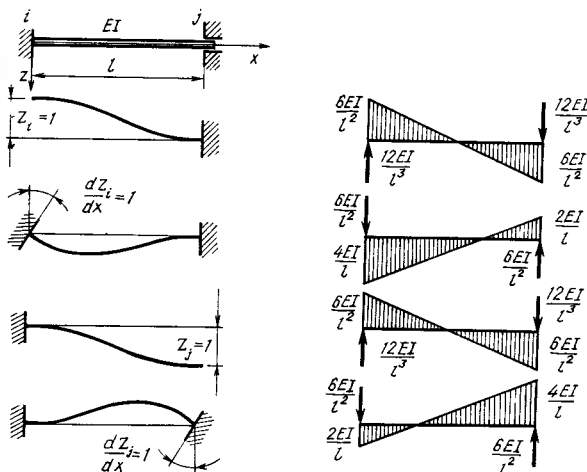


Рис. 6.6. К построению матрицы жесткости четвертого порядка

$$\mathbf{S}_F = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_3 \\ Q_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{M}{10} \begin{bmatrix} -6/l \\ 2 \\ -6/l \\ 4 \\ -9/l \\ 6 \\ -9/l \\ 3 \end{bmatrix}$$

В рассмотренном примере матрица жесткости в (6.1) составлена с помощью таблиц, решение для которой получено методом сил. Для стержней это сделать достаточно просто, так как они в действительности соединяются между собой только по концам. В других случаях (например, при расчете плит и оболочек) изложенным способом получить матрицу жесткости не удастся.

6.1.3. Формирование матрицы жесткости конечного элемента на основе принципа возможных перемещений

При общем подходе к формированию матрицы жесткости в МКЭ приходится задавать форму деформирования рассматриваемого конечного элемента. Для этой цели часто используется вариационный подход (см. гл. 7). Ниже изложение ведется в матричной форме

на основе принципа возможных перемещений, в соответствии с которым в системе, находящейся в равновесии, возможная работа всех внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю.

Пусть U — работа внешних сил F_i , а W — работа внутренних сил S_j . Тогда $U + W = 0$, или

$$\sum_{i=1}^n F_i \bar{Z}_i = \sum_{j=1}^m S_j \bar{v}_j, \quad (6.2)$$

где $\bar{Z}_i$ и $\bar{v}_j$ — возможные перемещения и деформации.

В матричной форме выражение (6.2) примет вид $\mathbf{F}^* \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{v}}$, или после транспонирования $\bar{\mathbf{Z}}^* \mathbf{F} = \bar{\mathbf{v}}^* \mathbf{S}$. Поскольку матрица $\bar{\mathbf{Z}}^*$ единичная, можно записать $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{v}}^* \mathbf{S}$.

В гл. 3 деформации определялись через матрицу $\mathbf{a}$, т. е. $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \bar{\mathbf{Z}}$. Так как $\bar{\mathbf{Z}}$ единичная матрица, $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$, или $\bar{\mathbf{v}}^* = \mathbf{a}^*$. В итоге

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}^* \mathbf{S}. \quad (6.3)$$

Усилия определяются через матрицу жесткости необъединенных элементов конструкции, т. е. $\mathbf{S} = \mathbf{k} \mathbf{v}$, или $\mathbf{S} = \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{Z}$. После подстановки в (6.3) и введения вместо $\mathbf{F}$ нового обозначения $\mathbf{R}$ (в рассматриваемом случае определяются реакции от заданных перемещений)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^* \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{Z}.$$

Произведение $\mathbf{a}^* \mathbf{k} \mathbf{a}$ и является матрицей жесткости конечного элемента или любой конструкции:

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^* \mathbf{k} \mathbf{a}. \quad (6.4)$$

Для определения матрицы $\mathbf{K}$ некоторой конструкции необходимо знать матрицы жесткости составляющих ее элементов. Выражение (6.4) можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^p (\mathbf{a}_k^* \mathbf{r}_k \mathbf{a}_k), \quad (6.5)$$

где p — число элементов в конструкции; $\mathbf{r}_k$ — матрицы жесткости этих элементов; $\mathbf{a}_k$ — матрицы деформаций элементов (последние получают из матрицы $\mathbf{a}$ разделением ее по высоте на отдельные блоки, соответствующие каждому элементу).

Для примера 6.1 матрица жесткости имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^* \mathbf{k} \mathbf{a} = \mathbf{a}_A^* \mathbf{r}_A \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B^* \mathbf{r}_B \mathbf{a}_B.$$

Выражение (6.5) является универсальным. Его можно использовать при расчете любых конструкций. Более того, его можно применить для вывода матрицы жесткости отдельного элемента, когда за исходные принимают бесконечно малые элементы. Тогда выраже-

ние (6.5) примет интегральную форму. Матрица жесткости отдельного элемента

$$r_k = \int_V a^* r^{(dV)} a, \quad (6.6)$$

где V — объем элемента; a — матрица, дающая функциональную зависимость деформаций от перемещений; $r^{(dV)}$ (далее обозначается через C) — матрица жесткости бесконечно малого элемента.

Например, для стержня, изгибаемого в одной плоскости, приближенное дифференциальное уравнение, устанавливающее связь между усилиями и деформациями,

$$M = CZ''(x). \quad (6.7)$$

Здесь $C = EI [1]$ — матрица первого порядка; E — модуль продольной упругости материала; I — момент инерции поперечного сечения стержня.

6.1.4. Подбор функции перемещений конечного элемента

Для получения матрицы жесткости (6.6) необходимо задать перемещения системы. В этой операции отражаются основная идея и сложность метода конечных элементов. Во-первых, задают перемещения только одного элемента. Во-вторых, эти перемещения должны соответствовать деформированной схеме конструкции в месте нахождения элемента. Поскольку второе требование практически трудно осуществить, поступают как в случае решения задачи для бесконечно малого элемента, где компоненты напряженного состояния принимают либо постоянными, либо линейно изменяющимися. Это допущение переносится на элементы конечных размеров.

Уменьшением размеров элементов можно повысить точность расчетов, что одновременно ведет к увеличению числа рассматриваемых элементов и в конечном итоге к повышению порядка решаемой системы уравнений. В этой связи иногда с целью повышения точности решения не уменьшают размеры элементов, а принимают более сложным напряженное состояние отдельного элемента (например, за счет введения узловых точек не только в углах элемента, но и вдоль его сторон).

В общем виде перемещения конечного элемента в прямоугольной системе координат можно представить в матричной форме:

$$Z = W(x, y, z) [f_n]. \quad (6.8)$$

Здесь $[f_n]$ — вектор независимых параметров, определяемых числом степеней свободы элемента. В это число входят и повороты, если они необходимы по условию задачи. Например, для стержня, изображенного на рис. 6.6, число степеней свободы равно четырем. Поэтому задают полином

$$Z = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + f_4 x^3 = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = W [f_n]. \quad (6.9)$$

По выбранным функциям, используя известные зависимости (например, для плоской задачи теории упругости — с помощью уравнений Коши), находят деформации

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}(x, y, z) [\dot{f}_n]. \quad (6.10)$$

Для рассмотренного выше стержня (см. уравнение (6.7)) деформации являются вторыми производными от перемещений:

$$\mathbf{a} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] [\dot{f}_n] = \mathbf{B} [\dot{f}_n].$$

Параметры $\dot{f}_n$ определяются граничными условиями. С этой целью составляют выражения компонентов перемещений для принятых узловых точек

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} [\dot{f}_n]. \quad (6.11)$$

Матрицу $\mathbf{A}$ строят простой подстановкой координат узлов в принятые функции перемещений (6.8). Она является квадратной, так как число параметров $\dot{f}_n$ равно числу компонентов перемещений. Например, для стержня (см. рис. 6.6) после получения выражения для угла поворота

$$\frac{dZ}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] [\dot{f}_n].$$

Функция (6.9) дает

$$\begin{bmatrix} Z_i \\ Z'_i \\ Z_j \\ Z'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \dot{f}_3 \\ \dot{f}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 [\dot{f}_n]. \quad (6.12)$$

Из (6.11) $[\dot{f}_n] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}$. Если обратная матрица не существует, это свидетельствует о неудачном выборе функций перемещений. Операции обращения можно избежать, если принять функции перемещений с параметрами $\dot{f}_n$, удовлетворяющими граничным условиям при задании последовательных единичных перемещений. Как правило, для этих целей используют полиномы Эрмита и др.

Поскольку при определении $\dot{f}_n$ единичные перемещения задают последовательно, матрица $\mathbf{Z}$ будет единичной. В результате $[\dot{f}_n] = \mathbf{A}^{-1}$. Из выражений (6.10) и (6.6) получают окончательную формулу матрицы жесткости произвольного элемента

$$\mathbf{r}_k = \int_V (\mathbf{A}^{-1})^* \mathbf{B}^* \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} dV \quad (6.13)$$

квадратной и симметричной, что отвечает физическому смыслу задачи.

Например, чтобы получить матрицу жесткости для стержня, представленного на рис. 6.6, нужно обратить матрицу $\mathbf{A}_0$ (см. (6.12)) и умножить результат на единичную матрицу, где первое единичное перемещение принять равным -1 , чтобы учесть принятое выше

правило знаков:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ -2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Если матрицу (6.14) и приведенные выше матрицы C и B подставить в (6.13) и выполнить указанные в формуле операции, в итоге получается матрица жесткости, приведенная в формуле (6.1). Это свидетельствует о том, что полином (6.9) дает для прямолинейных стержней постоянного сечения точное решение.

6.2. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МКЭ

6.2.1. Последовательность расчета

После деления конструкции на элементы составляют исходные матрицы метода перемещений. При этом следует иметь в виду, что при разбивке на одинаковые элементы снижается объем вычислений.

Распределенная нагрузка для каждого элемента заменяется эквивалентной узловой из условия равенства возможных работ узловых сил и заданной распределенной нагрузки на принятых перемещениях [29]. Окончательное выражение для узловых сил имеет вид

$$F_k = (A^{-1})^* \int_A W^* q(x, y) dA, \quad (6.15)$$

где $q(x, y)$ — заданная нагрузка на элемент; A — его площадь.

Матрицы A^{-1} и W приведены в § 6.1.4. Для стержня (см. рис. 6.6) при $q = \text{const}$ получаются значения, приведенные в седьмой строке таблицы прил. 1. При равномерно распределенной нагрузке узловые сосредоточенные силы можно определить путем суммирования нагрузки по площади, примыкающей к узлу. Получаемые силы относят к отдельным элементам. Полное усилие в узле определяется как сумма узловых сил от примыкающих к узлу элементов.

Если система координат отдельного элемента не совпадает с системой координат для узла, выполняется соответствующее преобразование с помощью матрицы a_k из (6.5). Матрица a_k отражает деформации элемента при единичных перемещениях по направлению дополнительных связей. В общем случае она как бы представляет собой матрицу преобразования координат при переходе от местной системы координат для одного элемента к системе координат для узла или для всей конструкции.

К исходным матрицам следует добавить матрицы усилий отдельных элементов. Они необходимы при расчете пластин и оболочек, напряженное состояние которых характеризуется не сосредоточенными усилиями в расчетных сечениях, как при расчете стержневых систем, а распределенными.

После составления исходных матриц расчет сводится к последовательному выполнению матричных операций (3.8). Однако при расчете конструкций, состоящих из множества элементов, использование формулы (6.4) для формирования матрицы жесткости всей системы становится нецелесообразным, так как размеры матриц k и a намного больше, чем матрицы K . При этом большинство эле-

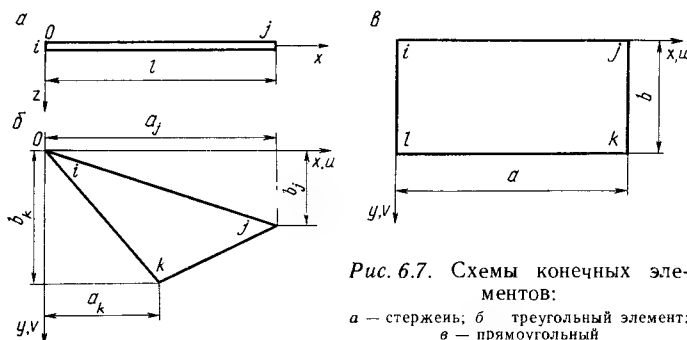


Рис. 6.7. Схемы конечных элементов:

a — стержень; b — треугольный элемент;
 $в$ — прямоугольный

ментов матриц k и a равно нулю. Поэтому рекомендуется составлять матрицу K из матриц жесткости отдельных элементов r_k в блочной форме.

Порядок матриц жесткости в блочной форме зависит от числа рассматриваемых узлов. Матрицы жесткости соответственно для стержня, треугольного и прямоугольного элементов (рис. 6.7) в блочной форме имеют вид:

$$\begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} \\ r_{ji} & r_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\begin{bmatrix} S_i \\ S_j \\ S_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} \\ r_{ki} & r_{kj} & r_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\begin{bmatrix} S_i \\ S_j \\ S_k \\ S_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} & r_{il} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} & r_{jl} \\ r_{ki} & r_{kj} & r_{kk} & r_{kl} \\ r_{li} & r_{lj} & r_{lk} & r_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_l \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Размеры матриц-столбцов и отдельных блоков зависят от решаемой задачи и степени подвижности узлов. В (6.1) штриховой линией показана разбивка матрицы жесткости на блоки. Видно, что для стержня блоки имеют второй порядок, так как в узле имеют место только два перемещения: линейное смещение, перпендикулярное к оси стержня, и угол поворота. Узлы обозначают так, чтобы узел i был в начале координат (см. рис. 6.7).

В общем случае оси координат, принятые при выводе матрицы жесткости отдельных элементов, могут не совпадать с системой координат всей конструкции или узла, к которому примыкает эле-

мент. Поэтому при составлении общих уравнений необходимо выполнять преобразование координат.

Преобразование координат выполняют с помощью матрицы a_k . Если деформации и усилия в общей системе координат обозначить v^0 и S^0 , то $v_k = a_k v_k^0$, $S_k = a_k S_k^0$. Чтобы получить элементы матрицы жесткости в общей системе координат, эти значения подставляют в выражения типа (6.16) — (6.18). Например, для первой строки в (6.17)

$$a_i S_i^0 = r_{ii} a_i v_i^0 + r_{ij} a_j v_j^0 + r_{ik} a_k v_k^0.$$

Если это равенство умножить слева на a_i^{-1} , то значение узлового усилия уже записывается в общей системе координат:

$$S_i^0 = (a_i^{-1} r_{ii} a_i) v_i^0 + (a_i^{-1} r_{ij} a_j) v_j^0 + (a_i^{-1} r_{ik} a_k) v_k^0. \quad (6.19)$$

Произведения в скобках являются блоками матрицы жесткости, записанными в общей системе координат. Для ортогональных матриц преобразования ($a_i^{-1} = a_i^*$)

$$r_{ik}^0 = a_i^* r_{ik} a_k. \quad (6.20)$$

В качестве примера приводим уравнение в блочной форме для узла n (рис. 6.8):

$$(S_i^0)_I + (S_j^0)_I + (S_k^0)_K + (S_k^0)_C + (S_i^0)_D + R_n = 0.$$

Здесь R_n — матрица-столбец реакций в добавленных связях от внешней нагрузки; S_i^0 — матрицы-столбцы усилий в отдельных элементах, примыкающих к узлу n . Их заменяют выражениями типа (6.19) из (6.17) и (6.18), а входящие в эти выражения деформации — узловыми перемещениями из условия совместности деформаций. Например, для узла n (см. рис. 6.8) это условие выглядит так:

$$(v_i^0)_I = (v_j^0)_I = (v_k^0)_K = (v_k^0)_C = (v_i^0)_D = Z_n.$$

В результате указанных подстановок уравнение равновесия для узла примет вид

$$\begin{aligned} (r_{ki}^0)_K Z_{p-1} + [(r_{kj}^0)_K + (r_{ki}^0)_C] Z_p + [(r_{kj}^0)_C + (r_{ij}^0)_D] Z_{p+1} + \\ + [(r_{ki}^0)_K + (r_{ji}^0)_I] Z_{n-1} + [(r_{ii}^0)_I + (r_{jj}^0)_I + (r_{kk}^0)_K + \\ + (r_{kk}^0)_C + (r_{ii}^0)_D] Z_n + [(r_{ik}^0)_D + (r_{ij}^0)_I] Z_{n+1} + (r_{ji}^0) Z_{s-1} + \\ + [(r_{jk}^0)_I + (r_{ii}^0)_I] Z_s + (r_{ik}^0) Z_{s+1} + R_n = 0. \end{aligned}$$

Такие уравнения составляют для каждого подвижного узла. Число одиночных уравнений в блочном равно числу степеней свободы в узле.

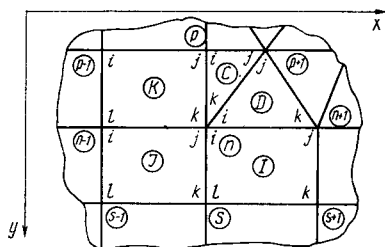


Рис. 6.8. Пример представления плоскости конечными элементами

Если местные системы координат, принятые при выводе матриц жесткости, совпадают с общей системой координат, то матрицы преобразования a_k будут единичными. Тогда $r_{ik}^0 = r_{ik}$. В этом случае определение матрицы жесткости всей системы существенно упрощается и сводится к суммированию по блокам.

Систему уравнений можно получить иначе. После составления уравнений основные неизвестные определяют либо через матрицу, обратную матрице жесткости всей системы, либо путем решения системы уравнений, что целесообразно при малом числе вариантов нагружения. Затем находят перемещения узлов каждого элемента $v_k = a_k Z$. Если матрицы a_k единичные, перемещения узлов элементов численно равны перемещениям узлов, к которым примыкает рассматриваемый элемент.

В стержневых системах сосредоточенные усилия в расчетных сечениях определяют с помощью матрицы жесткости: $S = kv$. В континуальных системах напряженное состояние характеризуется распределенными усилиями или напряжениями. Их вычисляют, используя матрицу жесткости бесконечно малого элемента, т. е. $S_k = C_k a_k$, где $a = B[f_n]$. С учетом того, что $[f_n] = A^{-1}$, данное выражение записывается так:

$$S_k = C_k B_k A_k^{-1} v_k = N_k^x v_k. \quad (6.21)$$

Здесь $N_k^x = C_k B_k A_k^{-1}$ — матрица усилий для одного элемента.

В общем случае элементы матрицы усилий N_k^x в (6.21) являются функциями координат. Однако, как правило, усилия находят в определенных узлах. С этой целью в N_k^x подставляют значения координат каждого узла. В результате размер полученной матрицы усилий отличается от размера N_k^x . Число ее строк равно числу усилий в узле, умноженному на количество узлов, а число столбцов — числу степеней свободы элемента. Ниже эта матрица обозначена N_k .

Для конечных элементов, имеющих контакт с упругим основанием, нужно иметь специальные матрицы, учитывающие влияние этого основания. Далее принята модель основания Винклера — Циммермана с двусторонней связью, где давление основания на сооружение пропорционально перемещениям, т. е.

$$p = kZ. \quad (6.22)$$

Здесь k — коэффициент основания, характеризующий его упругие свойства.

Если в выражение (6.22) подставить значение прогиба из (6.8), то, например, для двухмерной задачи

$$p(x, y) = kZ(x, y) = kW[f_n] = kWA^{-1}Z.$$

При определении узловых сил единичные перемещения Z_i задают последовательно, поэтому матрица Z единичная. Тогда $p(x, y) = kWA^{-1}$. После подстановки этого выражения в (6.15) вместо

$q(x, y)$ получают формулу

$$p_k = (A^{-1})^* \int_A W^* k W A^{-1} dA. \quad (6.23)$$

Матрицы W и A^{-1} приведены выше.

Если конечные элементы принять одинаковыми, а величину k единой для всех элементов, то с помощью выражения (6.23) достаточно будет составить лишь одну матрицу. Полученная матрица суммируется с матрицей жесткости одного элемента: $r_k^p = r_k + p_k$. Далее из матриц r_k^p составляется матрица жесткости всей системы по методике, изложенной выше. Обычным путем определяются свободные члены. Общая система уравнений принимает вид $K_p Z + R_0 = 0$.

6.2.2. Расчет плоских стержневых систем

При расчете плоских стержневых систем обычно используются два конечных элемента: 1) прямолинейный стержень постоянного сечения, по концам которого приложены моменты; 2) такой же стержень, но с моментом только на одном конце (на другом конце стержня шарнир). Для первого стержня принимают функцию перемещений (6.9), а для второго $Z(x) = f_1 + f_2 x + f_3 x^3$ (начало координат на шарнирном конце). Матрица жесткости для первого стержня приведена в (6.1). Для второго стержня матрица, полученная по формуле (6.13), имеет вид

$$r_k = \frac{3EI}{l} \begin{bmatrix} 1/l^2 & 1/l^2 & -1/l \\ 1/l^2 & 1/l^2 & -1/l \\ -1/l & -1/l & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого узла сначала записывается поперечная сила, затем — изгибающий момент.

Матрицы реакций упругого винклеровского основания, полученные по формуле (6.23) для двух видов стержней, имеют вид:

$$p_1 = \frac{k_0 l}{35} \begin{bmatrix} 13 & -11l/6 & -9/2 & 13l/12 \\ & l^2/3 & 13l/12 & -l^2/4 \\ & & 13 & -11l/6 \\ \text{(Симметрично)} & & & l^2/3 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$p_2 = \frac{k_0 l}{35} \begin{bmatrix} 33/4 & -39/8 & 11l/8 \\ & 17 & -3l \\ \text{(Симметрично)} & & 2l^2/3 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Здесь $k_0 = kb$ — коэффициент упругого основания для стержня единичной длины; b, l — ширина сечения и длина стержня. При разбивке

на элементы стержня, лежащего на упругом основании, рекомендуется пользоваться следующим условием [51]: $\alpha l = 0,7 - 1,5$, где $\alpha = (kb/(4EI))^{1/4}$.

Пример 6.2. Определить усилия в элементах рамы на упругом основании (рис. 6.9) с помощью МКЭ.

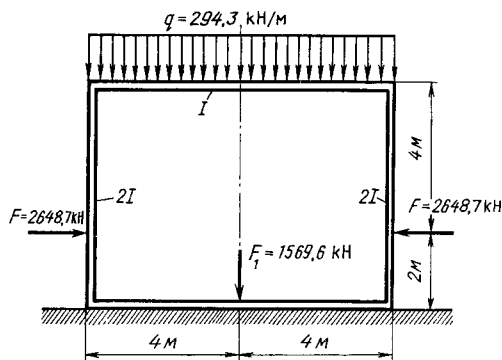


Рис. 6.9. Рама на упругом основании

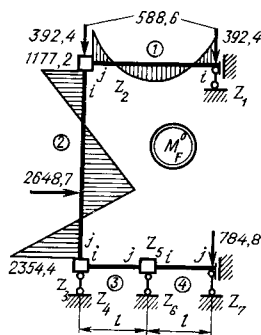


Рис. 6.10. Основная система для полурамы (см. рис. 6.9) и изгибающие моменты в ней от внешней нагрузки

Вспользуемся полученными матрицами (6.1), (6.24). Ширина лежащего на основании стержня 1 м, $EI = 196\,200$ кПа, $k_0 = 29\,430$ кН·м, $l = 2$ м.

Вследствие симметрии рамы рассмотрим лишь половину ее. При выборе основной системы стержень, лежащий на упругом основании, делим на две одинаковые части (рис. 6.10). Тогда общее число основных неизвестных с учетом симметрии рамы равно семи. Основная система и эпюра от внешней нагрузки в основной системе метода перемещений показаны на рис. 6.10. Общее число элементов равно четырем.

Для элементов 1 и 2 используем матрицу жесткости (6.1):

$$r_1 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{3}{2l^2} & -\frac{3}{2l} & \frac{3}{2l^2} & -\frac{3}{2l} \\ & 2 & -\frac{3}{2l} & 1 \\ & & \frac{3}{2l^2} & -\frac{3}{2l} \\ \text{(Симметрично)} & & & 2 \end{bmatrix}; \quad r_2 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{8}{9l^2} & -\frac{4}{3l} & \frac{8}{9l^2} & -\frac{4}{3l} \\ & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3l} & \frac{4}{3} \\ & & \frac{8}{9l^2} & -\frac{4}{3l} \\ \text{(Симметрично)} & & & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Для стержней 3 и 4 матрицы жесткости будут одинаковыми. Перед их составлением проверяем условие $\alpha l = 0,7 - 1,5$: $\alpha l = 2,0(29\,430 \cdot 1/(4 \cdot 196\,200))^{1/4} = 0,88$ (условие выполняется). Эти матрицы тоже определяются выражением (6.1) и отдельно здесь не приводятся.

Для стержней 3 и 4 матрицу жесткости суммируем с матрицей реакций основания (6.24). Все элементы матрицы умножим на $kl^2/(35EI) = 0,0171$. В результате получаем

$$p_3 = p_4 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0,2223 & -0,0627 & -0,0770 & 0,0371 \\ & 0,0228 & 0,0371 & -0,0171 \\ & & 0,2223 & -0,0627 \\ \text{(Симметрично)} & & & 0,0228 \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости с учетом упругости основания

$$r_3^p = r_4^p = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 3,2223 & -3,0627 & 2,9230 & -2,9629 \\ & 4,0228 & -2,9620 & 1,9829 \\ & & 3,2223 & -3,0627 \\ \text{(Симметрично)} & & & 4,0228 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицы перемещений концов стержней при единичных перемещениях по направлению дополнительных связей:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу свободных членов построим по эпюре M_F^0 (см. рис. 6.10):

$$R_0^* = [-588,6 \quad 784,8 \quad -2354,4 \quad -588,6 \quad 0 \quad 0 \quad -784,8].$$

Дальнейший расчет состоит в последовательном выполнении матричных операций.

1. Определение матрицы жесткости всей рамы по формуле (6.5):

$$K_p = \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* r_k^p a_k).$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$K_p = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0,375 & -0,75 & 0 & -0,375 & 0 & 0 & 0 \\ & 4,6667 & 1,3333 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6,6895 & 3,0627 & 1,9829 & -2,9629 & 0 \\ & & & 3,5973 & 2,9629 & -2,9230 & 0 \\ & & & & 8,0456 & 0 & -2,9629 \\ & & & & & 6,4446 & -2,9230 \\ \text{(Симметрично)} & & & & & & 3,2223 \end{bmatrix}.$$

2. Решение системы уравнений $K_p Z + R_0 = 0$: $Z_1 = 2898,86$; $Z_2 = -55,23$; $Z_3 = 425,46$; $Z_4 = 1439,72$; $Z_5 = -2,45$; $Z_6 = 1627,87$; $Z_7 = 1718,03$. Все значения Z_i имеют множитель $l/(EI)$.

3. Вычисление усилий от узловой нагрузки отдельно для каждого стержня с помощью матриц жесткости, учитывающих упругость основания (стержни 3 и 4): $S_k = r_k^p v_k$. Деформации определяются как $v_k = a_k Z$ либо по схеме рамы, что, естественно, проще при расчете рам без ЭВМ.

Запишем окончательные значения усилий:

$$S_1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} 2898,86 \\ 0 \\ -1439,72 \\ -55,23 \end{bmatrix} \frac{l}{EI} = \begin{bmatrix} 588,60 \\ -1149,63 \\ 588,60 \\ -1404,77 \end{bmatrix};$$

$$S_2 = r_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -55,23 \\ 0 \\ 425,46 \end{bmatrix} \frac{l}{EI} = \begin{bmatrix} -246,82 \\ 419,97 \\ -246,82 \\ 1060,95 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = r_3^p \begin{bmatrix} -1439,72 \\ 425,46 \\ 1627,87 \\ -2,45 \end{bmatrix} \frac{l}{EI} = \begin{bmatrix} -1191,23 \\ 1292,57 \\ -215,92 \\ 113,80 \end{bmatrix};$$

$$S_4 = r_4^p \begin{bmatrix} -1627,87 \\ -2,45 \\ 1718,03 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{l}{EI} = \begin{bmatrix} -184,62 \\ -114,48 \\ 785,00 \\ -443,41 \end{bmatrix}$$

На рис. 6.11 построены эпюры M_F^{y3} и Q_F^{y3} . Для стержней 3 и 4 эпюра M криволинейная в силу распределенной реакции основания.

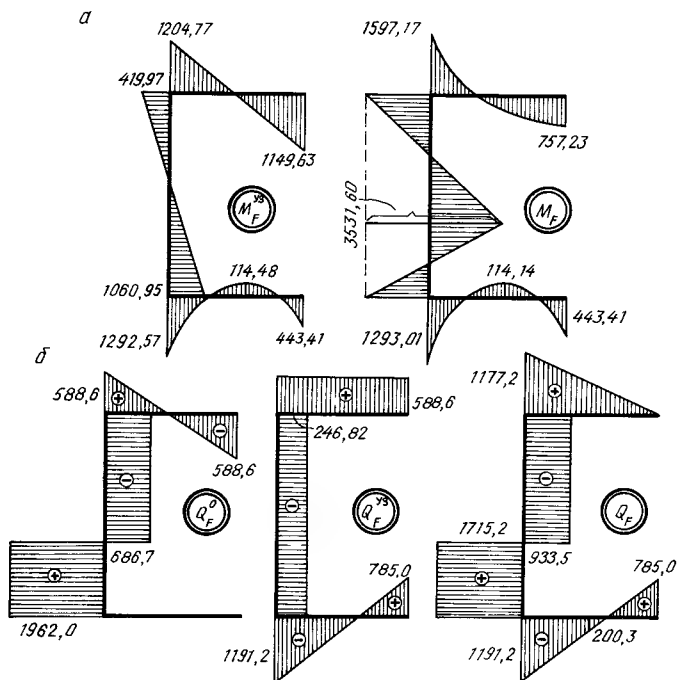


Рис. 6.11. Построение эпюр изгибающих моментов (а) и поперечных сил (б) в элементах рамы, показанной на рис. 6.9

4. Определение усилий от заданной нагрузки. С этой целью эпюры M_F^{y3} и Q_F^{y3} суммируются с эпюрами M_F^0 (см. рис. 6.10) и Q_F^0 соответственно. На эпюре M_F приведены средние значения ординат для узлов.

На эпюре поперечных сил в месте стыка элементов 3 и 4 записано среднее значение Q_F .

6.2.3. Плоская задача теории упругости

К плоским задачам теории упругости относят задачи, связанные с расчетом панелей, протяженных плотин, балок-стенок и др.

Здесь конечные элементы различаются по форме, числу неизвестных в узле, могут быть криволинейными между углами [29], иметь трещины и т. п. Ниже рассматриваются два элемента: прямоугольный и треугольный с двумя неизвестными в узле.

Функции перемещений для прямоугольника

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1 + f_2x + f_3xy + f_4y - 0,5f_7y^2, \\ v &= f_5 + f_6y + f_7xy + f_8x - 0,5f_3x^2; \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

для треугольника

$$u = f_1 + f_2x + f_3y, \quad v = f_4 + f_5x + f_6y.$$

Начало координат показано на рис. 6.7.

Матрица жесткости для прямоугольника

$$r_k = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & -r_{12} & r_{17} & -r_{14} \\ & r_{22} & -r_{14} & r_{24} & -r_{12} & r_{26} & r_{14} & r_{28} \\ & & r_{11} & -r_{12} & r_{17} & r_{14} & r_{15} & r_{12} \\ & & & r_{22} & -r_{14} & r_{28} & r_{12} & r_{26} \\ & & & & r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ & & & & & r_{22} & -r_{14} & r_{24} \\ & & & & & & r_{11} & -r_{12} \\ & & & & & & & r_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

(Симметрично)

где $r_{11} = r_1 + r_2$; $r_{12} = r_5 + r_6$; $r_{13} = -r_1 + r_2$; $r_{14} = r_5 - r_6$; $r_{15} = -0,5r_1 - r_2$; $r_{17} = 0,5r_1 - r_2$; $r_{22} = r_3 + r_4$; $r_{24} = 0,5r_3 - r_4$; $r_{26} = -0,5r_3 - r_4$; $r_{28} = -r_3 + r_4$; $r_1 = mBx/3$; $r_2 = B/(4m)$; $r_3 = B_y/(3m)$; $r_4 = mB/4$; $r_5 = B_v/4$; $r_6 = B/4$; $B_x = E_x h/\mu$; $B_y = E_y h/\mu$; $B_v = v_x B_x = v_y B_y$; $B = hG$; $m = b/a$; $\mu = 1 - v_x v_y$.

Здесь E_x , E_y — модули упругости материала в направлении осей x и y ; v_x , v_y — коэффициенты Пуассона в направлении тех же осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластинки.

Матрица жесткости для треугольного элемента в (6.17):

$$\begin{aligned} r_{ii} &= A_{np} \begin{bmatrix} b_{jk}E_x + a_{kj}^2\mu G & a_{kj}b_{jk}(v_y E_y + \mu G) \\ a_{kj}b_{jk}(v_x E_x + \mu G) & a_{kj}^2 E_y + b_{jk}^2\mu G \end{bmatrix}, \\ r_{ij} &= A_{np} \begin{bmatrix} b_{jk}b_k E_x - a_{kj}a_k\mu G & -b_{jk}a_k v_y E_y + a_{kj}b_k\mu G \\ a_{kj}b_k v_x E_x - b_{jk}a_k\mu G & -a_{kj}a_k E_y + b_{jk}b_k\mu G \end{bmatrix}, \\ r_{ik} &= A_{np} \begin{bmatrix} -b_{jk}b_j E_x + a_{kj}a_j\mu G & b_{jk}a_j v_y E_y - a_{kj}b_j\mu G \\ -a_{kj}b_j v_x E_x + b_{jk}a_j\mu G & a_{kj}a_j E_y - b_{jk}b_j\mu G \end{bmatrix}, \\ r_{ji} &= A_{np} \begin{bmatrix} b_k^2 E_x + a_k^2\mu G & -a_k b_k(v_y E_y + \mu G) \\ -a_k b_k(v_x E_x + \mu G) & a_k^2 E_y + b_k^2\mu G \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$r_{jk} = A_{np} \begin{bmatrix} -b_j b_k E_x - a_k a_j \mu G & a_j b_k v_y E_y + a_k b_j \mu G \\ a_k b_j v_x E_x + a_j b_k \mu G & -a_k b_j E_x - b_j b_k \mu G \end{bmatrix},$$

$$r_{kk} = A_{np} \begin{bmatrix} b_j^2 E_x + a_j^2 \mu G & -a_j b_j (v_y E_y + \mu G) \\ -a_j b_j (v_x E_x + \mu G) & a_j^2 E_y + b_j^2 \mu G \end{bmatrix}.$$

Здесь $A_{np} = h / (2\mu(a_j b_k - a_k b_j))$; $a_{kj} = a_k - a_j$; $b_{jk} = b_j - b_k$. Значения местных координат a_j , b_j , a_k , b_k подставляют в матрицу с соответствующими знаками.

Матрица усилий для прямоугольного элемента имеет размер 9×8 . Она дает значения нормальных усилий в узлах и сдвигающего усилия для середины элемента (в ней те же обозначения, что и в матрице жесткости):

$$\begin{bmatrix} N_x^i \\ N_x^j \\ N_x^k \\ N_x^l \\ N_y^i \\ N_y^j \\ N_y^k \\ N_y^l \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_x}{a} - \frac{B_v}{b} & \frac{B_x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_v}{b} \\ -\frac{B_x}{a} & 0 & \frac{B_x}{a} - \frac{B_v}{b} & 0 & \frac{B_v}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_v}{b} & \frac{B_x}{a} & \frac{B_v}{b} - \frac{B_x}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{B_v}{b} & 0 & 0 & \frac{B_x}{a} & 0 & -\frac{B_x}{a} & \frac{B_v}{b} \\ -\frac{B_v}{a} - \frac{B_y}{b} & \frac{B_v}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{b} \\ -\frac{B_v}{a} & 0 & \frac{B_v}{a} - \frac{B_y}{b} & 0 & \frac{B_y}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y}{b} & \frac{B_v}{a} & \frac{B_y}{b} - \frac{B_v}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_y}{b} & 0 & 0 & \frac{B_v}{a} & 0 & -\frac{B_v}{a} & \frac{B_y}{b} \\ -\frac{B}{2b} - \frac{B}{2a} & \frac{B}{2b} & \frac{B}{2b} & \frac{B}{2a} & \frac{B}{2b} & \frac{B}{2a} & \frac{B}{2b} & \frac{B}{2a} \end{bmatrix} v_k. \quad (6.28)$$

Матрица усилий для треугольного элемента имеет размер 3×6 (все усилия относятся к центру тяжести треугольника):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_{jk} B_x & a_{kj} B_v & b_k B_x & -a_k B_v & -b_j B_x & a_j B_v \\ b_{jk} B_v & a_{kj} B_y & b_k B_v & -a_k B_y & -b_j B_v & a_j B_y \\ a_{kj} B & b_{jk} B & -a_k B & b_k B & a_j B & -b_j B \end{bmatrix} v_k,$$

где $A = 0,5(a_j b_k - a_k b_j)$.

Матрицы жесткости и матрицы усилий представлены для ортотропных пластин в условиях плоского напряженного состояния.

Пример 6.3. Определить напряженное состояние защемленной по боковым краям изотропной панели толщиной h с отверстием при действии силы тяжести (рис. 6.12). Плотность материала ρ , $\nu=1/6$.

Симметрия панели относительно двух осей позволяет рассмотреть лишь ее четверть (рис. 6.13), на которую нанесена сетка и показаны граничные условия (частота сетки принята по [27]). Все элементы одинаковы и имеют матрицу жесткости (6.27):

$$\mathbf{r}_k = Eh \begin{bmatrix} 0,45 & 0,15 & -0,2357 & -0,0643 & -0,2786 & -0,15 & 0,0643 & 0,0643 \\ & 0,45 & 0,0643 & 0,0643 & -0,15 & -0,2786 & -0,0643 & -0,2357 \\ & & 0,45 & -0,15 & -0,0643 & -0,0643 & -0,2786 & 0,15 \\ & & & 0,45 & 0,0643 & -0,2357 & 0,15 & -0,2786 \\ & & & & 0,45 & 0,15 & -0,2357 & -0,0643 \\ & & & & & 0,45 & 0,0643 & 0,0643 \\ & & & & & & 0,45 & -0,15 \\ & & & & & & & 0,45 \end{bmatrix} \quad \text{(Симметрично)}$$

Сила тяжести панели заменяется узловой нагрузкой (см. рис. 6.13). Нумерация неизвестных перемещений приведена на рис. 6.14, б. В данном случае общая система координат совпадает с системами координат отдельных элементов, поэтому матрицу жесткости для всей панели составляем простым суммированием блоков из выражения (6.18). Первые три уравнения в блочной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{ii})_A \mathbf{Z}_1 + (\mathbf{r}_{il})_A \mathbf{Z}_2 + (\mathbf{r}_{li})_A \mathbf{Z}_{56} + (\mathbf{r}_{lk})_A \mathbf{Z}_{78} + \mathbf{R}_1 &= 0, \\ (\mathbf{r}_{ii})_A \mathbf{Z}_1 + [(\mathbf{r}_{il})_A + (\mathbf{r}_{ii})_B] \mathbf{Z}_2 + (\mathbf{r}_{li})_B \mathbf{Z}_3 + (\mathbf{r}_{lj})_A \mathbf{Z}_{56} + \\ &+ [(\mathbf{r}_{lk})_A + (\mathbf{r}_{ij})_B] \mathbf{Z}_{78} + (\mathbf{r}_{ik})_B \mathbf{Z}_{9 \ 10} + \mathbf{R}_2 = 0, \\ (\mathbf{r}_{li})_B \mathbf{Z}_2 + [(\mathbf{r}_{il})_B + (\mathbf{r}_{ii})_B] \mathbf{Z}_3 + (\mathbf{r}_{li})_B \mathbf{Z}_4 + (\mathbf{r}_{lj})_B \mathbf{Z}_{78} + \\ &+ [(\mathbf{r}_{lk})_B + (\mathbf{r}_{ij})_B] \mathbf{Z}_{9 \ 10} + (\mathbf{r}_{ik})_B \mathbf{Z}_{11 \ 12} + \mathbf{R}_3 = 0. \end{aligned}$$

Индексы при $\mathbf{Z}$ указывают номера неизвестных. Если в узле одно из перемещений равно нулю, строки и столбцы блоков напротив нулевых перемещений вычеркиваются. Приведенные уравнения в числах:

$$\begin{aligned} 0,45Z_1 - 0,2357Z_2 + 0,0643Z_5 + 0,0643Z_6 - 0,15Z_7 - 0,2786Z_8 - 0,25F/(Eh) &= 0; \\ -0,2357Z_1 + 0,9Z_2 - 0,2357Z_3 + 0,15Z_5 - 0,2786Z_6 + \\ &+ 0,1286Z_8 - 0,15Z_9 - 0,2786Z_{10} - 0,5F/(Eh) = 0; \\ -0,2357Z_2 + 0,9Z_3 - 0,2357Z_4 + 0,15Z_7 - 0,2786Z_8 + \\ &+ 0,1286Z_{10} - 0,15Z_{11} - 0,2786Z_{12} - 0,5F/(Eh) = 0. \end{aligned}$$

Полная система уравнений 45-го порядка.

Система уравнений решена по стандартной программе на ЭВМ. В результате получены перемещения намеченных узловых точек. На рис. 6.14, б штриховой линией показана схема деформирования панели. Прогибы по ее верхней кромке имеют следующие значения: $Z_1 = 34,115F/(Eh)$; $Z_6 = 32,131F/(Eh)$; $Z_{14} = 26,692F/(Eh)$; $Z_{29} = 18,819F/(Eh)$; $Z_{36} = 9,414F/(Eh)$.

В данном случае из-за совпадения направлений осей общей и местных систем координат матрицы преобразований $\mathbf{a}_k$ являются единичными. Поэтому перемещения отдельных элементов равны перемещениям узлов, к которым эти элементы примыкают.

Напряжения вычисляются с помощью матрицы (6.28), усилия в которой нужно разделить на h . В связи с тем, что все элементы одинаковы, достаточно соста-

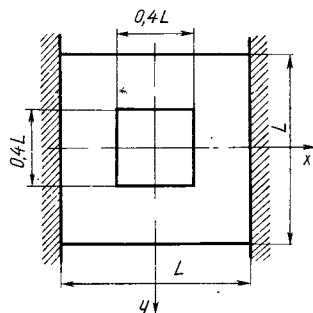


Рис. 6.12. Стеновая панель с отверстием

вить одну матрицу напряжений:

$$N_k = \frac{10E}{L} \begin{bmatrix} -1,0286 & -0,1714 & 1,0286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1714 \\ -1,0286 & 0 & 1,0286 & -0,1714 & 0 & 0,1714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1714 & 1,0286 & 0,1714 & -1,0286 & 0 \\ 0 & -0,1714 & 0 & 0 & 1,0286 & 0 & -1,0286 & 0,1714 \\ -0,1714 & -1,0286 & 0,1714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0286 \\ -0,1714 & 0 & 0,1714 & -1,0286 & 0 & 1,0286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,0286 & 0,1714 & 1,0286 & -0,1714 & 0 \\ 0 & -1,0286 & 0 & 0 & 0,1714 & 0 & -0,1714 & 1,0286 \\ -0,2143 & -0,2143 & -0,2143 & 0,2143 & 0,2143 & 0,2143 & 0,2143 & -0,2143 \end{bmatrix}$$

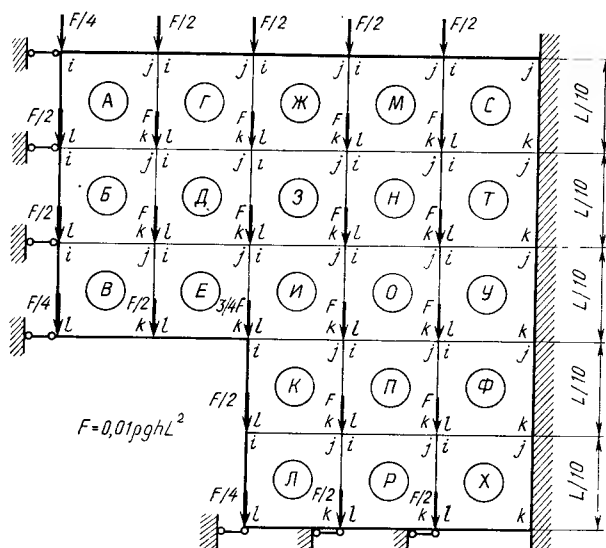


Рис. 6.13. Деление четверти панели (см. рис. 6.12) на элементы

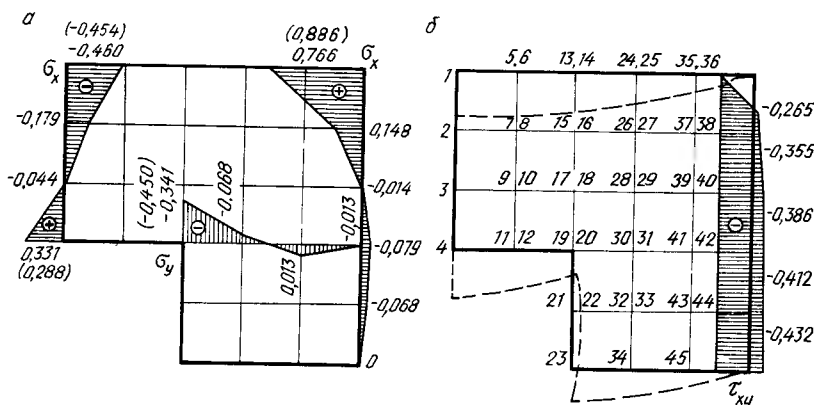


Рис. 6.14. Результаты расчета панели, показанной на рис. 6.12:
а — нормальные напряжения; б — схема деформирования и касательные напряжения

Вычислим напряжения, например, для элемента A путем умножения этой матрицы на вектор перемещений v_A :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \sigma'_{xy} \\ \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{zx} \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} 0 \\ Z_1 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ 0 \\ Z_2 \end{bmatrix} = N_A \begin{bmatrix} 0 \\ 34,115 \\ -4,541 \\ 32,131 \\ -1,797 \\ 32,341 \\ 0 \\ 34,515 \end{bmatrix} \frac{F}{Eh} = \rho g L \begin{bmatrix} -0,460 \\ -0,463 \\ -0,181 \\ -0,178 \\ -0,037 \\ -0,056 \\ -0,009 \\ 0,001 \\ -0,030 \end{bmatrix}.$$

Эпюры напряжений для ряда сечений изображены на рис. 6.14. Ординаты касательных напряжений отложены от линии, проходящей через центры элементов. Все значения напряжений имеют множитель $\rho g L$. В скобках для сравнения приведены напряжения, полученные в работе [27]. Для повышения точности вычислений следует уменьшить шаг сетки. Тогда концентрация напряжений в углах отверстия проявится более четко.

6.3. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РАСЧЕТУ ТОНКИХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

6.3.1. Расчет тонких прямоугольных плит

Для рассматриваемых ниже плит принимаются справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Материал плит считается идеально упругим и ортотропным.

Гипотеза о нормальном элементе в простейшем случае приводит к трем степеням свободы в узле: смещение срединной поверхности и повороты соответственно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. За положительный принят прогиб, направленный вниз. Положительные углы поворота отсчитываются по ходу часовой стрелки относительно оси x и против хода часовой стрелки относительно y , если смотреть вдоль осей из начала координат. При принятых допущениях матрица жесткости прямоугольного элемента будет 12-го порядка. Неполный бикубический полином, удовлетворяющий однородному дифференциальному уравнению изгибаемой плиты:

$$\begin{aligned} Z(x, y) = & f_1 + f_2x + f_3y + f_4x^2 + f_5y^2 + f_6xy + f_7x^2y + \\ & + f_8xy^2 + f_9x^3 + f_{10}y^3 + f_{11}x^3y + f_{12}xy^3. \end{aligned} \quad (6.29)$$

С помощью этого полинома получена матрица жесткости 12-го порядка по формуле (6.13). В блочной форме матрица представлена выражением (6.18), где каждый блок имеет третий порядок.

Так как матрица симметрична, ниже приведены лишь элементы верхнего треугольника матрицы, кроме нулевых:

$$r_{11} = r_{44} = r_{77} = r_{10\ 10} = \frac{4mD_x}{a^2} + \frac{4D_y}{mb^2} + \frac{2D_v}{ma^2} + \frac{14D_k}{5ma^2};$$

$$\begin{aligned}
r_{12} &= -r_{45} = -r_{78} = r_{10\ 11} = \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_v}{b} + \frac{D_\kappa}{5b}; \\
r_{13} &= r_{46} = -r_{79} = -r_{10\ 12} = \frac{2D_y}{mb} + \frac{D_v}{a} + \frac{D_\kappa}{5a}; \\
r_{14} &= r_{7\ 10} = -\frac{4mD_x}{a^2} + \frac{2D_y}{mb^2} - \frac{2D_v}{ma^2} - \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
r_{15} &= -r_{24} = -r_{7\ 11} = r_{8\ 10} = \frac{2mD_x}{a} + \frac{D_\kappa}{5b}; \\
r_{16} &= r_{34} = -r_{7\ 12} = -r_{9\ 10} = \frac{D_y}{mb} - \frac{D_v}{a} - \frac{D_\kappa}{5a}; \\
r_{17} &= r_{4\ 10} = -\frac{2mD_x}{a^2} - \frac{2D_y}{mb^2} + \frac{2D_v}{ma^2} + \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
r_{18} &= -r_{27} = -r_{4\ 11} = r_{5\ 10} = \frac{mD_x}{a} - \frac{D_\kappa}{5b}; \\
r_{19} &= -r_{37} = r_{4\ 12} = -r_{6\ 10} = \frac{D_y}{mb} - \frac{D_\kappa}{5a}; \\
r_{1\ 10} &= r_{47} = \frac{2mD_x}{a^2} - \frac{4D_y}{mb^2} - \frac{2D_v}{ma^2} - \frac{14D_\kappa}{5ma^2}; \\
r_{1\ 11} &= r_{2\ 10} = -r_{48} = -r_{57} = \frac{mD_x}{a} - \frac{D_v}{b} - \frac{D_\kappa}{5b}; \\
r_{1\ 12} &= -r_{3\ 10} = r_{49} = -r_{67} = \frac{2D_y}{mb} + \frac{D_\kappa}{5a}; \\
r_{22} &= r_{55} = r_{88} = r_{11\ 11} = \frac{4mD_x}{3} + \frac{4D_\kappa}{15m}; \\
r_{23} &= -r_{56} = r_{89} = -r_{11\ 12} = D_v; \\
r_{25} &= r_{8\ 11} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{D_\kappa}{15m}; \quad r_{28} = r_{5\ 11} = \frac{mD_x}{3} + \frac{D_\kappa}{15m}; \\
r_{2\ 11} &= r_{58} = \frac{2mD_x}{3} - \frac{4D_\kappa}{15m}; \quad r_{36} = r_{9\ 12} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{4mD_\kappa}{15}; \\
r_{39} &= r_{6\ 12} = \frac{D_y}{3m} + \frac{mD_\kappa}{15}; \quad r_{3\ 12} = r_{69} = \frac{2D_y}{3m} - \frac{mD_\kappa}{15}; \\
r_{33} &= r_{66} = r_{99} = r_{12\ 12} = \frac{4D_y}{3m} + \frac{4mD_\kappa}{15},
\end{aligned}$$

где $D_x = E_x h^3 / (12\mu)$; $D_y = E_y h^3 / (12\mu)$, $D_\kappa = Gh^3 / 6$, $D_v = \nu_x D_x = \nu_y D_y$ — жесткости плиты; ν_x и ν_y — коэффициенты поперечной

деформации материала; h — толщина плиты; $\mu = 1 - \nu_x \nu_y$; $m = b/a$.

В прил. 2 приведена матрица усилий. С ее помощью вычисляют значения изгибающих моментов в углах элемента и крутящего момента для его середины. Знак плюс у изгибающих моментов показывает, что растянуты нижние волокна. В таблице приняты обозначения:

$$D_{xv} = \frac{6D_x}{a^2} + \frac{6D_v}{b^2}; \quad D_{xa} = \frac{2D_x}{a}; \quad D_{yb} = \frac{2D_y}{b}; \quad D_{va} = \frac{2D_v}{a};$$

$$D_{yv} = \frac{6D_y}{b^2} + \frac{6D_v}{a^2}; \quad D_{ka} = \frac{D_k}{4a}; \quad D_{kb} = \frac{D_k}{4b}; \quad D_{vb} = \frac{2D_v}{b}.$$

Моменты M_x и M_y относятся к отдельным элементам. Они, как правило, имеют разные значения для элементов, примыкающих к одному и тому же узлу. Значение момента в узловой точке равно среднему значению от узловых моментов примыкающих элементов.

Если элементы имеют разные толщину и размеры, окончательный момент в узле определяется как сумма соответствующих моментов, умноженных на коэффициенты распределения. Приближенно коэффициенты распределения можно найти, исходя из жесткости элементов, по формуле

$$\gamma_k = r_k / \sum_{k=1}^n r_k, \quad (6.30)$$

где n — число элементов, сходящихся в узле; r_k — жесткость элемента, примыкающего к рассматриваемому узлу (r_k соответствует жесткости угла элемента при его повороте на единицу).

Следует иметь в виду, что коэффициенты γ для направлений x и y могут быть неодинаковыми.

При расчете плит на упругом основании необходима матрица реакций основания. Для прямоугольного элемента она вычисляется по формуле (6.23) с помощью функции (6.29) (см. прил. 3).

6.3.2. Расчет скошенных плит

Матрица жесткости (6.18) используется при расчете прямоугольных плит. Но в строительстве при проектировании косых мостов, зданий непрямоугольной формы в плане применяют скошенные плиты. Для их аппроксимации уже недостаточно прямоугольных элементов, поэтому вводят треугольные.

При расчете скошенных плит предлагается использовать ортогональную сетку. При такой сетке все элементы во внутренней области будут прямоугольными, а элементы, примыкающие к контурной линии, при прямолинейных границах контура плиты будут иметь форму прямоугольных треугольников. Ниже для такого треугольника приведена матрица жесткости. Эта матрица должна допускать совместное решение с матрицами жесткости прямоуголь-

ных элементов, т. е. при ее выводе неизвестными считаются три перемещения в узле, что приводит к матрице жесткости 9-го порядка. Однако, как показали вычисления, такая матрица дает весьма неточные результаты, особенно в случае защемления плит по контуру.

Поэтому для уточнения решения вводят дополнительный узел в середине кривой кромки, причем учитывают его поворот в плоскости, перпендикулярной к этой кромке (рис. 6.15):

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \alpha.$$

Введение дополнительного узла не препятствует совместному использованию прямоугольных и треугольных элементов, так как этот узел находится на контурной линии.

С появлением дополнительного неизвестного увеличивается порядок матрицы жесткости до десятого, поэтому используется полином с 10 параметрами:

$$Z = f_1 + f_2x + f_3y + f_4x^2 + f_5y^2 + f_6xy + f_7x^2y + f_8xy^2 + f_9x^3 + f_{10}y^3 = W[f_n]. \quad (6.31)$$

Элементы верхнего треугольника матрицы жесткости приведены в прил. 4. Порядок обхода перемещений в матрице: Z_i , $\partial Z_i/\partial x$, $\partial Z_i/\partial y$, Z_j , $\partial Z_j/\partial x$, $\partial Z_j/\partial y$, $\partial Z_k/\partial n$, Z_l , $\partial Z_l/\partial x$, $\partial Z_l/\partial y$.

Матрица усилий составляется с помощью выражения (6.21). Изгибающие моменты, являющиеся линейными функциями от x и y , определяются лишь для узловых точек i , j , l . Крутящий момент вычисляют для середины кривой кромки, т. е. в точке k . Таким образом, матрица усилий для плиты в форме прямоугольного треугольника N_k имеет 7 строк. Число столбцов матрицы равно десяти. Усилия записаны в следующем порядке: M_x^i , M_x^j , M_x^l , M_y^i , M_y^j , M_y^l , M_{xy}^k . Полностью матрица N_k приведена в прил. 5. В матрице

$$D_{22} = -\frac{2D_x}{a} - \frac{2aD_v}{b^2}; \quad D_{24} = \frac{6D_x}{a^2} + \frac{12D_v c^2}{b^2};$$

$$D_{25} = -\frac{4D_x}{a} - \frac{2aD_v c^2}{b^2}; \quad D_{26} = \frac{2D_v}{b} (1 + c^2);$$

$$D_{28} = \frac{6D_v}{b^2} (1 - 2c^2); \quad D_{33} = -\frac{2bD_x}{a^2} - \frac{2D_v}{b};$$

$$D_{34} = \frac{6D_x}{a^2} (1 - 2s^2); \quad D_{38} = \frac{12D_x s^2}{a^2} + \frac{6D_v}{b^2};$$

$$D_{39} = \frac{2D_x}{a} (1 + s^2); \quad D_{310} = -\frac{2bD_x s^2}{a^2} - \frac{4D_v}{b};$$

$$D_{52} = -\frac{2D_v}{a} - \frac{2aD_y}{b^2}; \quad D_{54} = \frac{6D_v}{a^2} + \frac{12D_y c^2}{b^2};$$

$$D_{55} = -\frac{4D_v}{a} - \frac{2aD_y c^2}{b^2}; \quad D_{56} = \frac{2D_y}{b} (1+c^2);$$

$$D_{58} = \frac{6D_y}{b^2} (1-2c^2); \quad D_{63} = -\frac{2bD_v}{a^2} - \frac{2D_y}{b};$$

$$D_{64} = \frac{6D_v}{a^2} (1-2s^2); \quad D_{68} = \frac{12D_v s^2}{a^2} + \frac{6D_y}{b^2};$$

$$D_{69} = \frac{2D_v}{a} (1+s^2); \quad D_{610} = -\frac{2bD_v s^2}{a^2} - \frac{4D_y}{b}.$$

Замена распределенной нагрузки узловой выполняется по (6.15). При равномерно распределенной нагрузке и использовании функции перемещений (6.31) получаются следующие вертикальные силы: $F_i = (3/20)qab$; $F_j = (qab/20)(3+c^2)$; $F_l = (qab/20)(3+s^2)$.

В приведенных матрицах c — косинус α , s — синус α . Остальные обозначения соответствуют случаю прямоугольного элемента.

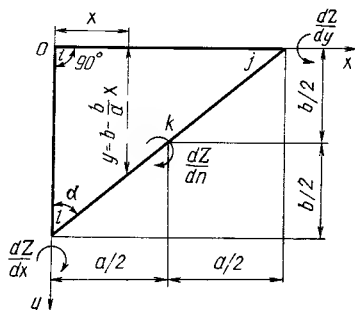


Рис. 6.15. Элемент плиты в форме прямоугольного треугольника

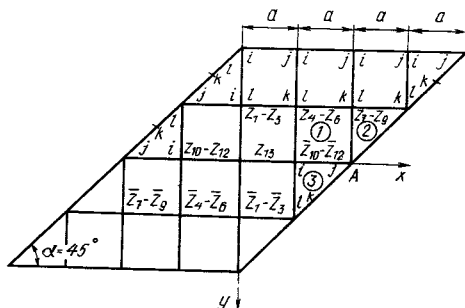


Рис. 6.16. Деление скошенной плиты на отдельные элементы

Пример 6.4. Найти усилия в изотропной защемленной по контуру плите, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.16). Коэффициент поперечной деформации $\nu=0$. Разделим плиту при помощи ортогональной сетки на 20 элементов двух типов и составим для них матрицы жесткости.

Матрица жесткости для квадратной плиты при $\nu=0$ приведена в прил. 6. Для треугольного элемента нужен лишь блок r_{ii} :

$$r_{ii} = D \begin{bmatrix} 24/a^2 & 4/a & 4/a \\ 4/a & 2 & 0 \\ 4/a & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

В каждом внутреннем узле, кроме центрального, имеют место три неизвестных перемещения. В центральном узле, где вследствие симметрии нагрузки углы поворота равны нулю, остается неизвестным только прогиб. Общее число неизвестных для всей плиты — 25. Однако в силу симметрии $\bar{Z}_1 = Z_1$; $\bar{Z}_4 = Z_4$; $\bar{Z}_7 = Z_7$; $\bar{Z}_{10} = Z_{10}$; $\bar{Z}_2 = -Z_2$; $\bar{Z}_5 = -Z_5$; $\bar{Z}_8 = -Z_8$; $\bar{Z}_{11} = -Z_{11}$; $\bar{Z}_3 = -Z_3$; $\bar{Z}_6 = -Z_6$; $\bar{Z}_9 = -Z_9$; $\bar{Z}_{12} = -Z_{12}$. В итоге получаем 13 неизвестных. Поэтому, составляя систему уравнений с 25 неизвестными, приводим подобные члены.

Для треугольных элементов в левой части плиты не совпадают оси местной

и общей систем координат, поэтому для блоков матриц этих элементов применяем преобразование (6.20).

Матрица преобразования для плит имеет вид

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

где φ — угол поворота местной системы координат относительно общей. В данном случае $\varphi = 180^\circ$. Следовательно,

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как в этом примере только один блок r_{ii} , то для левых треугольных элементов можно сразу сделать преобразование

$$r_{ii}^0 = a_i^* r_{ii} a_i = D \begin{bmatrix} 24/a^2 & -4/a & -4/a \\ -4/a & 2 & 0 \\ -4/a & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Заменим распределенную нагрузку узловой. В узле прямоугольного элемента сила составляет $0,25 qa^2$, а в узле треугольного элемента — $0,15 qa^2$. В окончательном виде матрица коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов представлены в прил. 7, где коэффициенты при неизвестных следует умножить на D .

В результате решения системы уравнений на ЭВМ способом Гаусса получены прогибы $Z_1 = 0,0749$, $Z_4 = 0,0948$, $Z_7 = 0,0327$, $Z_{10} = 0,0798$, $Z_{13} = 0,1533$ (общий множитель qa^4/D) и углы поворота $Z_2 = 0,0876$, $Z_3 = 0,1287$, $Z_5 = -0,0365$, $Z_6 = 0,0770$, $Z_8 = -0,0656$, $Z_9 = -0,0025$, $Z_{11} = 0,1259$, $Z_{12} = 0,0998$ (общий множитель qa^3/D). Максимальный прогиб приблизительно на 10% больше, чем прогиб, вычисленный вариационным методом в работе [16].

Усилия определим с помощью матриц усилий для прямоугольного и треугольного элементов (прил. 2 и 5). В центре плиты $M_x = 0,1887 qa^2$. Этот момент характеризует среднее значение моментов в углах четырех элементов, которые примыкают к центру плиты.

При определении моментов по косой кромке, например в точке A , сначала с помощью матриц прил. 2 и 5 находим $M_{x1}^k = -0,2271 qa^2$, $M_{x2}^l = -0,1916 qa^2$, $M_{x3}^i = -0,2271 qa^2$, а затем по выражению (6.30) вычисляем коэффициенты распределения:

$$\gamma_1 = \frac{r_{22(1)}}{r_{22(1)} + r_{99(2)} + r_{55(3)}} = \frac{1,6}{1,6 + 1,25 + 1,083} = 0,40678;$$

$$\gamma_2 = 0,31780; \quad \gamma_3 = 0,27542.$$

В итоге получаем окончательное значение моментов в узле A :

$$M_x^A = M_{x1}^k \gamma_1 + M_{x2}^l \gamma_2 + M_{x3}^i \gamma_3 = -0,2158 qa^2.$$

В направлении оси y коэффициенты распределения определяются аналогично. Например,

$$\gamma_1 = r_{33(1)} / (r_{33(1)} + r_{1010(2)} + r_{66(3)}).$$

Затем, вычисляя моменты для каждого элемента $M_{y1}^k = -0,1916 qa^2$, $M_{y2}^l = -0,1916 qa^2$, $M_{y3}^i = -0,2271 qa^2$, получаем $M_y^A = -0,2029 qa^2$. Учитывая, что сумма изгибающих моментов в ортогональных направлениях величина постоянная [16], определяем $M_n^A = M_x^A + M_y^A = -0,4187 qa^2$.

6.3.3. Расчет ребристых плит

Для приближенного расчета ребристых перекрытий с ортогональными ребрами можно использовать матрицу жесткости прямоугольного элемента плиты, подкрепленного по контуру эксцентрично расположенными ребрами (рис. 6.17). Вводятся общепринятые допущения для плиты и стержней. Принимается, что ребра присоединены по линиям. Материалы плиты и ребер могут быть различными. В каждом узле принимаются пять неизвестных перемещений: u , v , w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$. Последовательность обхода узлов: i , j , k , l .

Для вывода матрицы используются функции перемещений (6.26) и (6.29). Матрица имеет 20-й порядок (рис. 6.18). В блоки второго порядка r^{II} вписывают соответствующие элементы матрицы жесткости плоского напряженного состояния (6.27), в блоки r^{III} третьего порядка — соответствующие элементы матрицы жесткости изгибаемой плиты (см. § 6.3.1.). Остальные элементы матрицы жесткости ребристой плиты определяются наличием эксцентрично расположенных стержней.

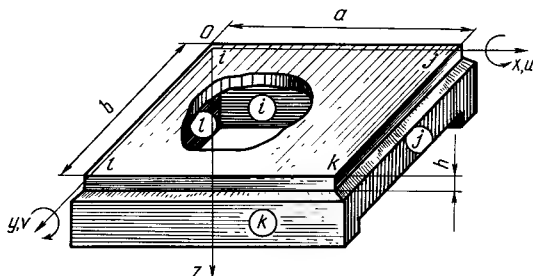


Рис. 6.17. Коробчатый элемент

В прил. 8 выписаны ненулевые значения для верхнего треугольника матрицы.

В матрице жесткости введены следующие обозначения:

$$B_x = \frac{E_x h}{\mu}, \quad B_y = \frac{E_y h}{\mu}, \quad B_v = \frac{\nu_x E_x h}{\mu} = \frac{\nu_y E_y h}{\mu};$$

$$m = b/a, \quad \mu = 1 - \nu_x \nu_y, \quad B = G_n h;$$

$$C_g = E_g I_g + E_g A_g (e_g - z_g)^2 + b B_x z_g^2 / 3 \quad (g = i, k);$$

$$C_q = E_q I_q + E_q A_q (e_q - z_q)^2 + a B_y z_q^2 / 3 \quad (q = j, l);$$

$$C_n^0 = E_n (I_n + A_n e_n^2) \quad (n = i, j, k, e);$$

$$D_n = E_n A_n e_n, \quad B_n = E_n A_n, \quad z_{ij} = z_i + z_j;$$

$$z_g = e_g / \left(1 + \frac{b B_x}{3 B_g} \right), \quad z_q = e_q / \left(1 + \frac{a B_y}{3 B_q} \right),$$

i, j, k, l — номера стержней (см. рис. 6.17); e_n — расстояние между срединной плоскостью плиты и нейтральной линией сечения отдельного стержня.

Остальные обозначения общепринятые. При отсутствии ребер все элементы матрицы жесткости, приведенные в прил. 8, равны нулю.

При расчете ребристых плит, лежащих на упругом винклеровском основании, можно пользоваться матрицей реакций, приведенной в прил. 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r_{ii}^n						r_{lj}^n				r_{ik}^n					r_{il}^n				
			r_{ii}^n				r_{lj}^n				r_{ik}^n					r_{il}^n			
r_{ji}^n						r_{jj}^n				r_{jk}^n					r_{jl}^n				
			r_{ji}^n				r_{jj}^n				r_{jk}^n					r_{jl}^n			
r_{ki}^n						r_{kj}^n				r_{kk}^n					r_{kl}^n				
			r_{ki}^n				r_{kj}^n				r_{kk}^n					r_{kl}^n			
r_{li}^n						r_{lj}^n				r_{lk}^n					r_{ll}^n				
			r_{li}^n				r_{lj}^n				r_{lk}^n					r_{ll}^n			

Рис. 6.18. Схема матрицы жесткости коробчатого элемента

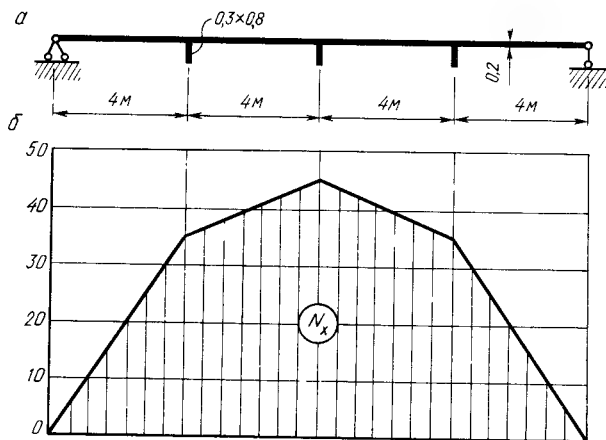


Рис. 6.19. Эпюра продольных усилий в ребристой плите

Усилия в стержнях и в плите определяют отдельно, причем отдельно находят усилия при плоском напряженном состоянии и изгибе. Окончательные значения напряжений вычисляют путем сум-

мирования. Усилия в стержнях от изгиба определяют с помощью матрицы, приведенной в прил. 9, а продольные усилия по концам стержней — в прил. 10, где обозначено $\gamma_n = e_n - z_n$, $B_g^{np} = 2B_g + E_x hb$, $B_q^{np} = 2B_q + E_y ha$. Правило знаков общепринятое.

Изгибающие моменты в плите определяют с помощью матрицы прил. 2, продольные силы в углах плиты и сдвигающее усилие для середины плиты — прил. 11.

Пример 6.5. Рассчитать свободно опертую по контуру квадратную плиту с ребрами одного направления. Поперечное сечение плиты показано на рис. 6.19, а. Материал плиты и стержней одинаков ($E = 2,5 \cdot 10^6$ кПа, $\nu = 0,15$). Нагрузка (кН/м) вдоль ребер изменяется по синусоидальному закону: $q(x) = (4/\pi) \sin(\pi x/l)$.

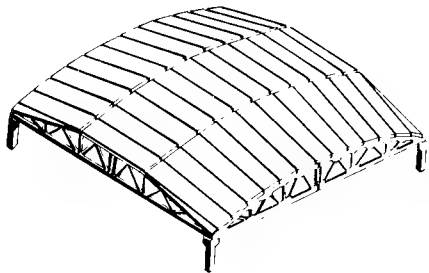


Рис. 6.20. Пологая оболочка из плоских коробчатых элементов

В поперечном направлении нагрузка постоянная. В силу наличия двух осей симметрии рассмотрим четверть плиты, разделенную на четыре элемента размером 4×4 м. Количество неизвестных равно 20. Узловая нагрузка определялась по формуле (6.15).

На рис. 6.19, б приведены вычисленные значения продольных усилий N_x в срединной плоскости плиты в направлении ребер для среднего сечения. Максимальное усилие в центре плиты $N_x^{\max} = 46$ кН/м. Это значение незначительно отличается от результата решения задачи вариационным способом. Прогиб в центре плиты — 2,114 см.

Матрицу жесткости ребристой плиты можно использовать для приближенного расчета пологих складчатых оболочек типа изображенной на рис. 6.20. Но в этом случае при составлении матрицы жесткости всей конструкции нужно для узлов, где имеют место переломы поверхности, выполнять преобразование (6.20). Причем целесообразно для каждого угла назначать свою систему координат, чтобы матрицы преобразования были однотипными.

6.3.4. Понятие о расчете оболочек методом конечных элементов

Расчет оболочек методом конечных элементов существенно усложняется из-за учета кривизны срединной поверхности. Вывод матриц жесткости для конечных элементов произвольной оболочки является исключительно громоздким, поэтому матрицы в явном виде, как это сделано выше, здесь не приводятся. Для их вычисления используется численное интегрирование на ЭВМ по специальным программам.

Первоначально при расчете произвольных оболочек их поверхность аппроксимировалась с помощью плоских элементов, как правило треугольных. Вершины треугольников располагали на срединной поверхности. При расчете цилиндрических оболочек исполь-

зовались прямоугольные элементы, матрицы жесткости которых приведены в § 6.2.3 и в § 6.3.1. Объединенная матрица жесткости имеет размер (20×20) :

$$r_k = \begin{bmatrix} r_{\text{пл}}^{(8 \times 8)} & 0 \\ 0 & r_{\text{изг}}^{(12 \times 12)} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Аппроксимация плоскими элементами криволинейной срединной поверхности дает переломы в местах стыков элементов. Наличие

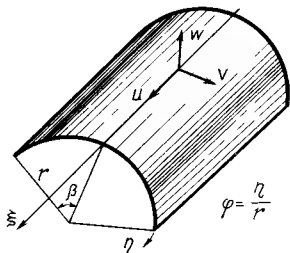


Рис. 6.21. Элемент цилиндрической оболочки

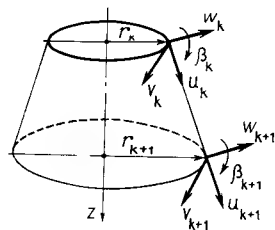


Рис. 6.22. Конический элемент оболочки вращения

этих переломов связывает плоское и изгибное напряженное состояние. При расчете ребристых плит эта связь создается за счет эксцентричного подкрепления стержней. Однако аппроксимация плоскими элементами приводит к относительно низкой точности расчета. Поэтому были созданы элементы, которые учитывают кривизну оболочки. Более того, в работе [49] показано, что для криволинейных элементов при выводе матрицы жесткости нужно учитывать шесть независимых перемещений элемента как твердого тела. При этом подчеркивается, что эти перемещения нельзя представить полиномами. Для точного описания указанных перемещений необходимо вводить тригонометрические функции, например, для элемента цилиндрической оболочки (рис. 6.21)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & -r(1 - \cos \varphi \cdot \cos \beta) \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & r \cos \beta \cdot \sin \varphi \\ -r(\cos \varphi - \cos \beta) & -r \sin \varphi & \xi \cos \varphi & \xi \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ \theta_x \\ \theta_u \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

Для описания перемещений точек в срединной поверхности элемента задаются полиномы вида (6.20) (без последних членов), а для радиальных перемещений — бикубический полином. Матрица жесткости получается 24-го порядка. Подобного типа матрица

была использована в работе [28] для расчета цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями.

Большой класс конструкций представляют оболочки вращения. При осесимметричном их нагружении расчет существенно упрощается. В этом случае оболочка аппроксимируется цилиндрическими и коническими кольцевыми элементами. Матрица жесткости 8-го порядка для конического элемента (рис. 6.22) приведена в работе [62]. В качестве функций перемещений приняты: $u(s) = f_1 + f_2s$; $v(s) = f_3 + f_4s$; $w(s) = f_5 + f_6s + f_7s^2 + f_8s^3$; $\beta(s) = dw/ds = f_6 + 2f_7s + 3f_8s^2$, где s — координаты по меридиану.

Для уточнения расчета можно аппроксимировать кривизну оболочки по меридиану полиномами, что позволяет сократить число конечных элементов для получения той же точности, что при аппроксимации коническими элементами. Для расчета на произвольную нагрузку в окружном направлении перемещения разлагают в ряд Фурье, а в меридиальном направлении аппроксимируют полиномами 3-го порядка [85]: $u_j = (f_{1j} + f_{2j}s + f_{3j}s^2 + f_{4j}s^3) \cos j\theta$; $v_j = (f_{5j} + f_{6j}s + f_{7j}s^2 + f_{8j}s^3) \sin j\theta$; $w_j = (f_{9j} + f_{10j}s + f_{11j}s^2 + f_{12j}s^3) \cos j\theta$, где j — номер члена ряда при разложении по окружной координате θ ; $s = S/l_k$ — безразмерная меридиальная координата; l_k — длина дуги меридиана k -го конечного элемента.

Так как на внешних кромках только восемь неизвестных, а параметров f_n двенадцать, то для их определения между внешними кромками вводят два узла, для которых определяют только перемещения u и v .

В последние годы для расчета оболочек составлены специальные программы, которые учитывают и динамическую нагрузку и наличие подкрепляющих ребер [32].

6.4. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

6.4.1. Решение задач динамики стержневых систем

При решении задач динамики методом конечных элементов реальная стержневая система с бесконечным числом степеней свободы заменяется системой с конечным числом степеней свободы. Замена может производиться путем сосредоточения распределенной массы конструкции в определенных узлах или сечениях. При таком подходе матрица масс всей системы получается диагональной.

Результат будет более точным, если распределенную массу заменять узловыми из условия равенства возможных работ сосредоточенных и распределенных инерционных сил на принимаемых для каждого элемента перемещениях [29]. Указанную операцию выполняют в матричной форме. Порядок матрицы масс, называемой эквивалентной, для каждого элемента получается таким же, как для матрицы жесткости.

Ниже рассматриваются лишь линейные колебания стержней без

учета инерции вращения. Матрица эквивалентных масс для произвольного элемента имеет такой же вид, как для упругого основания (6.23):

$$\mathbf{M}_k = (\mathbf{A}^{-1})^* \int_A \mathbf{W}^* m_0 \mathbf{W} \mathbf{A}^{-1} dA. \quad (6.33)$$

Здесь лишь k заменено на m_0 — массу конструкции на единичной площади.

Матрицу масс для всей конструкции составляют по той же методике, что и матрицу жесткости, т. е. из матриц масс отдельных элементов:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^p (\mathbf{a}_k^* \mathbf{M}_k \mathbf{a}_k). \quad (6.34)$$

Если в системе есть сосредоточенные массы, их добавляют к соответствующим диагональным элементам матрицы $\mathbf{M}$.

Для определения частот свободных колебаний системы выполняют обращение матрицы жесткости $\mathbf{K}$ и составляют характеристическое уравнение

$$|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} - \lambda_j \mathbf{E}| = 0, \quad (6.35)$$

где $\mathbf{K}^{-1}$ — матрица податливости системы; $\mathbf{M}$ — матрица масс системы (6.34); $\mathbf{E}$ — единичная матрица; $\lambda_j = 1/\omega_j^2$ (ω_j — частота свободных колебаний системы).

Порядок характеристического уравнения зависит от числа степеней свободы, которое определяется числом основных неизвестных метода перемещений. Корни уравнения (6.35) получают по стандартным программам с помощью ЭВМ. Часто одновременно с корнями находят и собственные векторы, которые позволяют построить формы колебаний стержневой системы для каждой частоты. Для определения низшей частоты собственных колебаний системы можно использовать приближенные методы.

При динамическом расчете конструкций методом перемещений уравнения для определения перемещений примут вид

$$[\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}] \mathbf{Z} + \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, \quad (6.36)$$

где θ — частота вынужденных колебаний.

Затем вычисляют усилия. Например, для стержней их находят из выражения

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{r}_k - \theta^2 \mathbf{M}_k) \mathbf{a}_k \mathbf{Z} + \mathbf{S}_k^0. \quad (6.37)$$

В (6.37) $\mathbf{S}_k^0$ — матрица усилий в расчетных сечениях стержня от узловой нагрузки.

Масса прямолинейных стержней постоянного сечения равномерно распределена по длине стержня. В силу совпадения выражений (6.33) и (6.23) после замены k на m_0 из (6.24) и (6.25) легко получить матрицы эквивалентных масс для стержней двух типов.

Пример 6.6. Определить низшую частоту собственных колебаний рамы, изображенной на рис. 6.23, а.

Сначала следует выбрать основную систему и составить исходные матрицы. Основная система с двумя неизвестными приведена на рис. 6.23, б. Матрица для

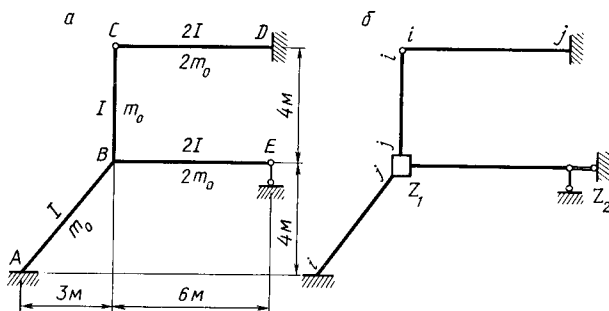


Рис. 6.23. К расчету рамы методом перемещений:

а заданная рама; б основная система

стержня AB дана в выражении (6.1), а для других стержней — в (6.2):

$$r_{AB} = EI \begin{bmatrix} 12/125 & -6/25 & 12/125 & -6/25 \\ & 4/5 & -6/25 & 2/5 \\ \text{(Симметрично)} & & 12/125 & -6/25 \\ & & & 4/25 \end{bmatrix};$$

$$r_{BC} = EI \begin{bmatrix} 3/64 & 3/64 & -3/16 \\ & 3/64 & -3/16 \\ \text{(Симметрично)} & & 3/4 \end{bmatrix};$$

$$r_{CD} = r_{BE} = EI \begin{bmatrix} 1/36 & 1/36 & -1/6 \\ & 1/36 & -1/6 \\ \text{(Симметрично)} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица эквивалентных масс стержня AB представлена матрицей (6.24), а для остальных трех стержней матрицей (6.25):

$$M_{AB} = m_0 \begin{bmatrix} 13/7 & -55/42 & -9/14 & 65/84 \\ & 25/21 & 65/84 & -25/28 \\ \text{(Симметрично)} & & 13/7 & -55/42 \\ & & & 25/21 \end{bmatrix},$$

$$M_{BC} = m_0 \begin{bmatrix} 33/35 & -39/70 & 22/35 \\ & 68/35 & -48/35 \\ \text{(Симметрично)} & & 128/105 \end{bmatrix},$$

$$M_{CD} = M_{BE} = m_0 \begin{bmatrix} 99/35 & -117/70 & 99/35 \\ & 204/35 & -216/35 \\ \text{(Симметрично)} & & 288/35 \end{bmatrix}.$$

Матрицы перемещений концов стержней при единичных перемещениях по направлению дополнительных связей строятся для каждого стержня по схемам деформирования рамы (рис. 6.24):

$$a_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{CD} = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{BE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее выполняются следующие матричные операции.

1. Формируется матрица жесткости всей системы по выражению (6.5):

$$K = EI \begin{bmatrix} 51/20 & 1/80 \\ 1/80 & 73/320 \end{bmatrix}.$$

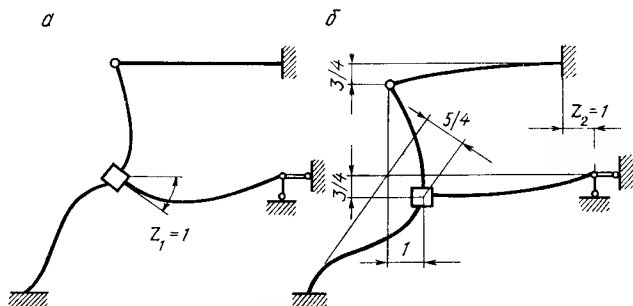


Рис. 6.24. Схемы деформирования рамы (см. рис. 6.23) при единичных перемещениях: а — при $Z_1 = 1$. б — при $Z_2 = 1$

2. Определяются матрицы эквивалентных масс для всей системы по формуле (6.34):

$$\bar{M} = m_0 \begin{bmatrix} 9,41905 & 4,36310 \\ 4,36310 & 9,71429 \end{bmatrix}.$$

К этой матрице добавляется матрица сосредоточенных масс, обусловленных смещениями стержней BC и BE вдоль их осей как твердых тел. При этом изменяется лишь значение элемента M_{22} : $M_{22}^0 = 4m_0 \frac{3}{4} + 6 \cdot 2m_0 \cdot 1 = 15m_0$.

Следовательно, окончательно матрица масс принимает вид

$$M = m_0 \begin{bmatrix} 9,41905 & 4,36310 \\ 4,36310 & 24,71429 \end{bmatrix}.$$

3. Производится обращение матрицы K и выполняется проверка обращения:

$$K^{-1} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0,39226 & -0,02149 \\ -0,02149 & 4,38462 \end{bmatrix}; \quad KK^{-1} = E.$$

4. Определяется произведение $K^{-1}M$ и записывается характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3,60095 \frac{m_0}{EI} - \lambda_j & 1,18034 \frac{m_0}{EI} \\ 18,92812 \frac{m_0}{EI} & 108,26901 \frac{m_0}{EI} - \lambda_j \end{vmatrix} = 0.$$

5. Решение уравнения:

$$\lambda_j^2 - 111,86996 \frac{m_0}{EI} \lambda_j + 367,52967 \left(\frac{m_0}{EI} \right)^2 = 0;$$

$$\lambda_{\max} = 108,48198 \frac{m_0}{EI}; \quad \lambda_{\min} = 3,38798 \frac{m_0}{EI}.$$

Низшая частота собственных колебаний рамы $\omega_{m,n} = \sqrt{1/\lambda_{\max}} = 0,096 \sqrt{EI/m_0}$. Собственный вектор для $\omega_{\min}$, равный $[1 \ 89]^T$, дает форму колебаний рамы, практически совпадающую со схемой на рис. 6.24, б.

Пример 6.7. Определить усилия в раме, изображенной на рис. 6.25, а, при действии вибрационной нагрузки. Частота вынужденных колебаний рамы $\theta = 0,39268 \sqrt{EI/m_0}$. Эта величина составляет приблизительно 0,7 от низшей частоты собственных колебаний рассматриваемой рамы.

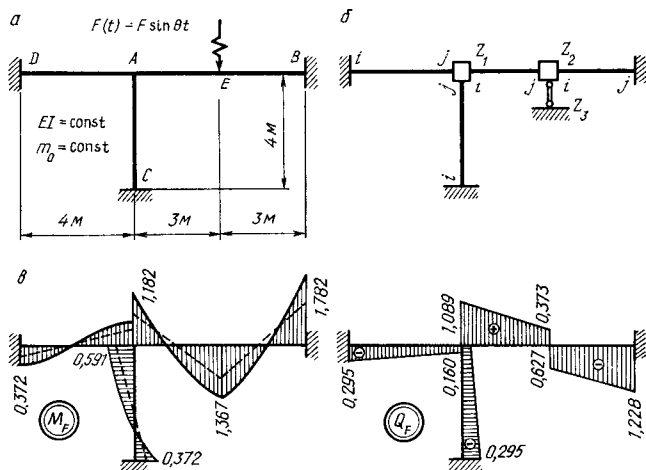


Рис. 6.25. Рама, нагруженная динамической нагрузкой (а), ее основная система (б) и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (в)

Матрицы жесткости всех элементов соответствуют матрице (6.1):

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_{AD} = EI \begin{bmatrix} 0,1875 & -0,3750 & 0,1875 & -0,3750 \\ & 1,0 & -0,3750 & 0,5 \\ & & 0,1875 & -0,3750 \\ \text{(Симметрично)} & & & 1,0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{r}_{AE} = \mathbf{r}_{BE} = EI \begin{bmatrix} 0,4444 & -0,6667 & 0,4444 & -0,6667 \\ & 1,3333 & -0,6667 & 0,6667 \\ & & 0,4444 & -0,6667 \\ \text{(Симметрично)} & & & 1,3333 \end{bmatrix}$$

Матрицы масс для всех элементов соответствуют матрице (6.24):

$$\mathbf{M}_{AC} = \mathbf{M}_{AD} = m_0 \begin{bmatrix} 1,4857 & -0,8381 & -0,5143 & 0,4952 \\ & 0,6095 & 0,4952 & -0,4571 \\ & & 1,4857 & -0,8381 \\ \text{(Симметрично)} & & & 0,6095 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{AE} = \mathbf{M}_{BE} = m_0 \begin{bmatrix} 1,1143 & -0,4714 & -0,3858 & 0,2786 \\ & 0,2571 & 0,2786 & -0,1929 \\ & & 1,1143 & -0,4714 \\ \text{(Симметрично)} & & & 0,2571 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{a}_k$ формируют по схемам деформирования рам при единичных перемещениях (схемы эти очень просты, поэтому они здесь не приводятся):

$$a_{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{AD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$a_{AE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{BE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее выполняются матричные операции.

1. Формируются матрицы жесткости для динамического расчета ($r_k^m = r_k - \theta^2 M_k$):

$$r_{AC}^m = r_{AD}^m = EI \begin{bmatrix} -0,0416 & -0,2458 & 0,2668 & -0,4514 \\ & 0,9060 & -0,4514 & 0,5705 \\ & & -0,0416 & -0,2458 \\ \text{(Симметрично)} & & & 0,9060 \end{bmatrix};$$

$$r_{AE}^m = r_{BE}^m = EI \begin{bmatrix} 0,2726 & -0,5940 & 0,5039 & -0,7096 \\ & 1,2937 & -0,7096 & 0,6964 \\ & & 0,2726 & -0,5940 \\ \text{(Симметрично)} & & & 1,2937 \end{bmatrix}.$$

2. Составляется матрица свободных членов

$$R^* = [0 \ 0 \ -F].$$

3. Формируется матрица жесткости для всей системы с помощью выражения (6.5):

$$K = EI \begin{bmatrix} 3,1057 & 0,6964 & -0,7096 \\ & 2,5874 & 0 \\ \text{(Симметрично)} & & 0,5452 \end{bmatrix}.$$

4. Решается система уравнений (6.36):

$$Z = \begin{bmatrix} 0,6525 \\ -0,1756 \\ 2,6833 \end{bmatrix} \frac{F}{EI}.$$

5. Определяются усилия в отдельных элементах по выражению (6.37) (здесь $S_k^0 = 0$):

$$S_{AC} = S_{AD} = \begin{bmatrix} -0,295 \\ 0,372 \\ -0,160 \\ 0,591 \end{bmatrix} F; \quad S_{AE} = \begin{bmatrix} 1,089 \\ -1,182 \\ 0,373 \\ -1,367 \end{bmatrix} F; \quad S_{BE} = \begin{bmatrix} -0,627 \\ 1,367 \\ -1,228 \\ 1,782 \end{bmatrix} F.$$

На рис. 6.25, в представлены эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, построенные по этим матрицам (множитель F опущен). Штриховой линией показана эпюра M_F при статическом приложении силы F . Из эпюры Q следует, что эпюра моментов должна быть криволинейной, так как инерционные силы являются распределенными.

6.4.2. Решение задач устойчивости стержневых систем

При решении задач устойчивости сооружений с применением МКЭ в основу расчета можно положить энергетический метод, в соответствии с которым задают форму потери устойчивости конструкции и вычисляют для нее полную энергию. В отличие от общепринятой процедуры при использовании МКЭ задание формы потери устойчивости и вычисление энергии производится для отдельных элементов, а затем последняя суммируется для всего сооружения. В качестве независимых параметров принимают основные неизвестные метода перемещений.

Выражение полной энергии всего сооружения для заданной формы потери устойчивости в матричной записи имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^* \mathbf{K} \mathbf{Z} - \frac{1}{2} \mathbf{Z}^* \mathbf{Y} \mathbf{Z}, \quad (6.38)$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости системы; $\mathbf{Z}$ — матрица перемещений; $\mathbf{Y}$ — матрица потенциала нагрузки.

В выражении (6.38) первый член представляет собой потенциальную энергию деформации, равную работе внутренних сил, а второй член — потенциал нагрузки, равный работе внешних сил.

В соответствии с идеей энергетического метода приращение энергии для системы, находящейся в безразличном состоянии равновесия, равно нулю:

$$\frac{dE}{d\mathbf{Z}} = \mathbf{K} \mathbf{Z} - \mathbf{Y} \mathbf{Z} = 0.$$

В результате получаются однородные уравнения относительно Z_i . Так как при потере устойчивости системы $Z_i \neq 0$, то определитель

$$|\mathbf{K} - \mathbf{Y}| = 0. \quad (6.39)$$

При решении задач устойчивости принимают, что изменяющаяся нагрузка пропорциональна одному параметру F . Этот параметр можно представить как общий множитель к элементам матрицы $\mathbf{Y}$:

$$|\mathbf{K} - F \mathbf{Y}_0| = 0. \quad (6.40)$$

Решение задачи устойчивости можно свести к проблеме собственных значений. С этой целью выражение (6.40) надо разделить на F и умножить на $\mathbf{K}^{-1}$. В результате

$$\left| \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Y}_0 - \frac{1}{F} \mathbf{E} \right| = 0, \quad (6.41)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Если ввести обозначения $\lambda = 1/F$ и $\mathbf{L} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Y}_0$, выражение (6.41) примет вид характеристического уравнения, такого же, как при определении частот свободных колебаний системы:

$$|\mathbf{L} - \lambda \mathbf{E}| = 0. \quad (6.42)$$

При нахождении корней характеристического уравнения (6.42) используются те же стандартные программы и последовательность операций, что и при определении частот свободных колебаний конструкций. Роль матрицы масс в этом случае играет матрица потенциала нагрузки. Часто требуется найти лишь $F_{\min}$. Этой критической силе соответствует значение $\lambda_{\max}$, которое можно найти любым приближенным способом (например, методом последовательных приближений, путем двусторонней оценки с помощью следов матриц и др.).

Матрицу жесткости в определителе (6.39) составляют по методике, изложенной в § 6.2.1. Работа внешних сил, т. е. матрица Y , определяется так же, как и энергия деформации, — путем суммирования работы внешних сил для отдельных элементов:

$$Y = \sum_{k=1}^p (a_k^* Y_k a_k), \quad (6.43)$$

где a_k — матрица преобразования узловых перемещений отдельного элемента; Y_k — матрица потенциала нагрузки для отдельного элемента.

Чтобы определить потенциал нагрузки для одного элемента, нужно знать форму потери устойчивости и вид нагружения элемента. При этом вводят все допущения, принимаемые при решении задач устойчивости, например, методом перемещений.

Пусть форма потери устойчивости элемента описывается функцией $Z(s)$, а усилия в элементе от заданной нагрузки — матрицей F . Эти усилия совершают работу на перемещениях, которые, как известно, являются квадратами первых производных функции $Z(s)$. Работа внешних сил, записанная в матричной форме,

$$Y_k = \int_s \left(\frac{dZ}{ds} \right)^* F \left(\frac{dZ}{ds} \right) ds.$$

В это выражение подставляют значение первой производной $dZ/ds = G[f_n]$, или $dZ/ds = GA^{-1}$, где A^{-1} — матрица параметров f_n , определяемых из граничных условий. В результате матрица потенциала нагрузки для любого одного элемента [51]

$$Y_k \int_s (A^{-1})^* G^* F G A^{-1} ds. \quad (6.44)$$

Здесь A^{-1} имеет прежнее значение; G — матрица элементов функции перемещений $Z(s)$ после дифференцирования.

Особенность матрицы (6.44) состоит в том, что ее элементы — функции нагрузки, и поэтому она может быть различной для одного и того же элемента в зависимости от вида его нагружения.

Рассмотрим задачи устойчивости систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянного сечения. Для описания формы потери устойчивости одного элемента, у которого по концам нет шарниров, принимается следующая функция с четырьмя произволь-

ными параметрами f_n :

$$Z(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos \frac{\pi x}{l} & \sin \frac{\pi x}{l} \end{bmatrix} [f_n]. \quad (6.45)$$

В отличие от (6.9) эта функция в ряде случаев дает точное значение критической нагрузки. Дифференцирование выражения (6.45) по x дает

$$\frac{dZ}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} & \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \end{bmatrix} [f_n] = \mathbf{G} [f_n]. \quad (6.46)$$

Для определения параметров f_n нужно проделать ту же последовательность матричных операций, что и при выводе матрицы жесткости. При этом за положительные принимают перемещения, соответствующие вращению стержня по ходу часовой стрелки.

Чтобы получить матрицу $\mathbf{Y}_k$ из выражения (6.44), которое для данного случая примет вид

$$\mathbf{Y}_k = (\mathbf{A}^{-1})^* \left[\int_0^l \mathbf{G}^* \mathbf{F} \mathbf{G} dx \right] \mathbf{A}^{-1}, \quad (6.47)$$

нужно задать напряженное состояние стержня. Если он загружен постоянной продольной силой, $\mathbf{F} = F[1]$. Окончательное выражение матрицы потенциала нагрузки для прямолинейного стержня, загруженного постоянной продольной силой, с учетом (6.46) имеет вид

$$\mathbf{Y}_k = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} \\ \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \frac{l}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & \left(\frac{\pi^2}{4} - 3 \right) \frac{l}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} \\ \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} \\ \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \frac{l}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & \left(\frac{\pi^2}{4} - 3 \right) \frac{l}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$

(Симметрично)

Поскольку форма потери устойчивости элемента определяется функцией (6.45), следующую исходную матрицу — матрицу жесткости — составляют для этой же функции по выражению (6.13):

$$\mathbf{r}_k = \frac{\pi^4 EI}{8l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \\ & & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ & & & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

(Симметрично)

Если стержень, входящий в систему, не нагружен продольной силой, матрица потенциала нагрузки (6.48) будет нулевой. Для таких стержней в случае их изгиба при потере устойчивости системы нужно использовать матрицу жесткости (6.1), так как она дает точное значение реакций при отсутствии продольной силы.

Как и при решении задач динамики, для стержня с шарниром на одном конце можно понизить порядок матрицы потенциала нагрузки и матрицы жесткости. Для описания формы потери устойчивости такого стержня принимают функцию с тремя членами.

$$Z(x) = \left[1 \quad x \quad \cos \frac{\pi x}{l} \right] [f_n] \quad (6.50)$$

(начало координат расположено на защемленном конце стержня.) В отличие от функции, приведенной в § 6.2.2, эта функция обеспечивает более точный результат при решении задач устойчивости.

Повторяя вывод матрицы потенциала нагрузки и матрицы жесткости для функции (6.50), получают:

$$Y_k = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \frac{\pi^2}{8l} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ & \frac{\pi^2}{8} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ \text{(Симметрично)} & \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) l & \end{bmatrix}; \quad (6.51)$$

$$r_k = \frac{\pi^4 EI}{32l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \text{(Симметрично)} & & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Порядок обхода перемещений в матрицах: Z_i, Z_j, Z'_j .

Если продольная сила отсутствует, матрица Y_k будет нулевой. В матрицу жесткости (6.52) такого стержня вместо $\pi^4 EI / (32l)$ войдет множитель $3EI/l$, и она совпадет с матрицей, приведенной в § 6.2.2.

Пример 6.8. Найти значение критической нагрузки для рамы (рис. 6.26) [7].

Сначала составим исходные матрицы. Матрица жесткости стержня BD представлена матрицей (6.49). Матрицы жесткости остальных стержней определяются по (6.1). Матрицу потенциала нагрузки (6.48) составим только для стержня BD , так как для остальных стержней эти матрицы нулевые. По схемам деформирования рамы (углы поворота задаем по часовой стрелке, а линейное смещение влево) запишем матрицы:

$$a_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$a_{BD} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad a_{CE} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее выполняются матричные операции.

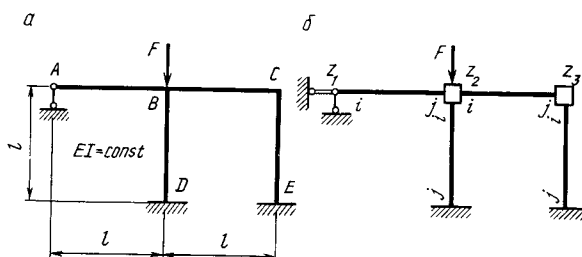


Рис. 6.26. К расчету рамы с узловой нагрузкой:
а — заданная система; б — основная система метода перемещений

1. Формируется матрица жесткости всей системы

$$K = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 24,1761/l & 6,0881 & 6 \\ & 11,2777l & 2l \\ \text{(Симметрично)} & & 8l \end{bmatrix}.$$

2. Составляется матрица потенциала нагрузки для всей системы

$$Y = a_{BD}^T Y_{BD} a_{BD} = F \begin{bmatrix} 1,2337/l & 0,1169 & 0 \\ & 0,1834l & 0 \\ \text{(Симметрично)} & & 0 \end{bmatrix}.$$

Приведенную выше методику целесообразно использовать для матриц высокого порядка. В данном случае проще сразу составить определитель (6.39). Его раскрытие приводит к квадратному уравнению относительно F :

$$F^2 - 74,4639 \frac{EI}{l^2} F + 898,3375 \left(\frac{EI}{l^2} \right)^2 = 0,$$

минимальный корень которого $F_{\min} = 15,14EI/l^2$. Решение задачи методом перемещений с помощью трансцендентных функций дает $F_{\min} = 15,1EI/l^2$. Результат, полученный с помощью функции (6.9), $F_{\min} = 15,41EI/l^2$ [7].

При линейном изменении нагрузки по длине вертикального стержня матрица F имеет вид

$$F = ql(1 - x/l) [1], \quad (6.53)$$

где q — сила тяжести стержня единичной длины (начало координат на нижнем конце стержня).

Пусть, например, требуется получить матрицу потенциала нагрузки для стержня, защемленного внизу и имеющего шарнирное опирание на верхнем конце. Для описания формы потери устойчивости принимается функция (6.50). На основании выражения

(6.47) с учетом (6.53) получают следующую матрицу:

$$Y_k = ql \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) \frac{\pi^2}{4l} & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) \frac{\pi^2}{4l} & \frac{5}{4} - \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^2}{16} \\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) \frac{\pi^2}{4l} & \frac{5}{4} - \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^2}{16} \\ \text{(Симметрично)} & & \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{\pi} - \frac{7}{4}\right) l \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Матрица жесткости в этом случае определяется матрицей (6.52), также полученной с помощью функции (6.50).

Пример 6.9. Определить критическую нагрузку для консольного защемленного внизу вертикального стержня постоянного сечения, нагруженного силой F на свободном конце, с учетом его силы тяжести q . Силы F и q связаны соотношением $F = 2ql$, где l — длина стержня.

Решается задача с одним неизвестным (линейное перемещение верхнего конца). Так как рассматриваются два вида нагружения, при решении используем матрицы потенциала нагрузки (6.51) и (6.54) и матрицу жесткости (6.52), из первых элементов первых строк которых и составляется определитель (6.39):

$$\frac{\pi^4 EI}{32l^3} - \left[\frac{\pi^2}{8l} F + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{\pi^2}{4l} \frac{F}{2} \right] = 0.$$

Отсюда $F_{\min} = 2,148EI/l^2$. Этот результат на 2,9 % меньше результата, приведенного в [72], но получен он более коротким путем. При $q = 0$ значение $F_{\min}$ совпадает с точным.

При реализации изложенного подхода следует помнить, что он приводит к относительно точным результатам при общепринятых основных неизвестных метода перемещений только для свободных рам [7]. В случае расчета несвободных рам, т. е. рам без линейных смещений узлов, для получения более точного результата необходимо делить сжатые стержни по крайней мере на два элемента.

6.4.3. Определение частот свободных колебаний прямоугольных и скошенных плит

Матрица жесткости прямоугольной плиты приведена в § 6.3.1.

Матрица эквивалентных масс определяется выражением (6.33). Для элемента постоянной толщины масса m_0 на единичной площади является величиной постоянной. Тогда выражение (6.33) примет вид выражения (6.23), в котором нужно лишь k заменить на m_0 . В результате матрица эквивалентных масс будет аналогична матрице реакций упругого основания, приведенной в прил. 3. Ход расчета, естественно, в этом случае такой же, как и для стержневых систем.

Пример 6.10. Определить низшую частоту свободных колебаний квадратной изотропной плиты, свободно опертой по контуру, при коэффициенте поперечной деформации, равном нулю.

Искомой частоте будет соответствовать симметричная форма колебаний, поэтому, разделив плиту на четыре одинаковых элемента, рассмотрим лишь четверть плиты. Примем начало координат в центре плиты, т. е. в узле i элемента (см. рис. 6.7, в). В данном случае неизвестными являются прогиб узла i и углы поворота в узлах j и l . Обозначим эти перемещения через Z_1 , Z_2 и $\bar{Z}_2$. Так как квадратная плита имеет еще и диагональную ось симметрии, то $\bar{Z}_2 = Z_2$. В итоге остается два неизвестных перемещения (две степени свободы).

Составим исходные матрицы и выполним необходимые вычисления для отдельного элемента.

1. Матрица жесткости рассматриваемой системы в обозначениях элементов матрицы жесткости одного элемента

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{15} + r_{112} \\ r_{51} & r_{55} \end{bmatrix},$$

или в числовом виде при $\nu = 0$ и $a = 0,5l$ (l — длина стороны плиты)

$$K = D \begin{bmatrix} 10,8/a^2 & 4,4/a \\ 2,2/a & 1,6 \end{bmatrix}.$$

2. Матрица масс для элемента, составленная по прил. 3:

$$M = \frac{a^2 m_0}{5} \begin{bmatrix} 1727/2520 & -2 \cdot 137a/2520 \\ -137a/2520 & a^2/63 \end{bmatrix}.$$

Множитель 2 во втором элементе первой строки учитывает элемент m_{112} (D — цилиндрическая жесткость плиты).

3. Обратная матрица жесткости

$$K^{-1} = \frac{a^2}{7,6D} \begin{bmatrix} 1,6 & -2,2/a \\ -4,4/a & 10,8/a^2 \end{bmatrix}.$$

4. Произведение $K^{-1}M$ и характеристическое уравнение:

$$K^{-1}M = \frac{a^4 m_0}{38D} \begin{bmatrix} 1,21613 & -0,20888a \\ -3,60260/a & 0,64981 \end{bmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1,21613b - \lambda_1 & -0,20888ab \\ -3,60260b/a & 0,64981b - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

(при $b = a^4 m_0 / (38D)$).

5. Корни квадратного уравнения $\lambda_1^2 - 1,86594b\lambda_1 + 0,03774b^2 = 0$: $\lambda_1 = 1,84549b$, $\lambda_2 = 0,02045b$. Низшая частота свободных колебаний плиты

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\max}}} = \sqrt{\frac{38D}{1,84549a^4 m_0}} = \frac{4,54}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m_0}} = \frac{18,16}{l^2} \sqrt{\frac{D}{m_0}}.$$

Точное значение $\omega_{\min} = (19,74/l^2) \sqrt{D/m_0}$. Расхождение получилось равным 8 %, т. е. деление плиты только на 4 элемента дало относительно грубый результат.

При определении частот свободных колебаний скошенных плит необходимо иметь матрицу эквивалентных масс для элемента в форме прямоугольного треугольника (см. рис. 6.15).

Матрица эквивалентных масс (6.33) для треугольной плиты с равномерно распределенной массой m_0

$$M_k = (A^{-1})^* \left[m_0 \int_0^a \int_0^{b-(b/a)x} W^* W dx dy \right] A^{-1}. \quad (6.55)$$

Матрица (6.55) имеет 10-й порядок и является симметричной. Элементы верхнего треугольника матрицы (все они имеют множитель $abm_0/10\,080$) приведены в прил. 12.

Следует иметь в виду, что выражение (6.55), как отмечалось ранее, по форме совпадает с выражением матрицы реакций упругого винклеровского основания с постоянным коэффициентом постели k . Поэтому описанные выше элементы можно использовать для расчета плит на упругом основании, заменив в общем множителе m_0 на k .

Пример 6.11. Определить низшую частоту свободных колебаний ромбовидной защемленной плиты постоянной толщины. Плита является изотропной, $\nu=0,3$.

Решим задачу с одним линейным перемещением в центре плиты. С этой целью разделим ромб на восемь прямоугольных треугольников (рис. 6.27). Низшей частоте

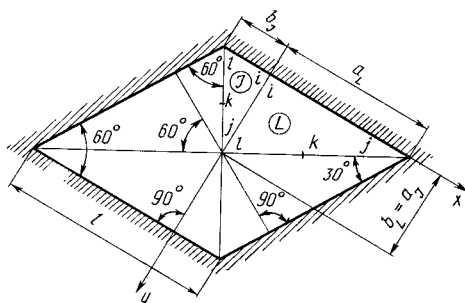


Рис. 6.27. К расчету ромбической плиты МКЭ

соответствует симметричная форма колебаний плиты, которая имеет две оси симметрии, что позволяет рассматривать одну ее четверть. Она состоит из двух треугольников L и J . В узлах k и в центре плиты углы поворота равны нулю. Таким образом, остается одно неизвестное — прогиб в центре плиты.

Выразим размеры элементов через длину стороны ромба l : $a_L = l \cos^2 30^\circ = 0,75l$; $b_L = a_J = l \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0,433l$; $b_J = l \cos^2 60^\circ = 0,25l$ (для обоих треугольников $\alpha = 60^\circ$, $\sin \alpha = 0,866$, $\cos \alpha = 0,5$). Отношение сторон $m = b/a = 0,57735$.

Для треугольника L следует определить (см. § 6.3.2): $r_{88}^L = 62,3555D/l^2$; $m_{88}^L = 363,891m_0l^2/10\,080$; для треугольника J — $r_{44}^J = 39,26D/l^2$; $m_{44}^J = 101,811m_0l^2/10\,080$.

Вычислим матрицу жесткости и матрицу масс для четверти плиты. В данном случае они имеют первый порядок:

$$\mathbf{K} = r_{88}^L + r_{44}^J = 101,6155D/l^2; \quad \mathbf{M} = m_{88}^L + m_{44}^J = 465,702m_0l^2/10\,080.$$

Из выражения (6.35) получаем

$$\omega_1 = (46,90/l^2) \sqrt{D/m_0}.$$

В [23] для такой плиты числовой множитель перед корнем равен 50,86. Расхождение составляет 7,79 %.

6.5. МЕТОД СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ

6.5.1. Основы метода суперэлементов

Применение МКЭ к расчету сложных пространственных конструкций приводит к целому ряду трудностей, главная из которых — необходимость представления конструкции большим числом конечных элементов и обработки вследствие этого большого объема информации, что не всегда соответствует быстродействию и объему запоминающих устройств ЭВМ.

Для устранения этих трудностей предложены различные модификации метода конечных элементов, имеющие целью уменьшить объем вводимой и хранимой в памяти ЭВМ информации, понизить порядок разрешающей системы уравнений и увеличить вычислительные возможности программ. Наиболее плодотворной оказалась идея суперэлементов. Она основана на представлении сложной конструкции в виде набора подконструкций (подструктур), каждая из которых заменяется совокупностью базисных конечных элементов и описывается в выбранной для нее удобной системе координат. Каждая из подструктур рассчитывается отдельно при закрепленных общих с другими структурами границах. Результатом этого расчета является получение матрицы жесткости подструктуры и матрицы нагрузок в ее узлах. Подструктура, для которой такие матрицы определены, называется *суперэлементом*.

Далее составляют систему уравнений для связей на границах суперэлементов, выражающую условия равновесия всей конструкции как совокупности суперэлементов. Эта система уравнений содержит значительно меньше неизвестных, чем система уравнений МКЭ. На этом завершается так называемый прямой ход расчета.

На обратном ходе расчета каждую из подструктур рассчитывают при заданной нагрузке и найденных на прямом ходе перемещениях ее граничных узлов. Такой расчет выполняется без особых затруднений, так как подструктуры всегда описываются системой уравнений невысокого порядка. С позиций классического метода перемещений в изложенном подходе используется кинематически неопределимая основная система метода перемещений.

При расчете сложных и больших по объему конструкций представление их в виде совокупности подконструкций одного уровня может оказаться недостаточным из-за большого порядка уравнений, описывающих расчетную схему каждой из подконструкций. Поэтому расчетная схема в этом случае строится в несколько этапов. Исходная конструкция может быть представлена при этом в виде совокупности иерархически построенных суперэлементов нескольких уровней. Число этих уровней определяется как предполагаемой точностью решения, так и возможностями используемой ЭВМ.

6.5.2. Построение матрицы жесткости и матрицы узловых нагрузок для суперэлемента [31]

Если конструкция разбита на несколько подконструкций, рассматриваемых как суперэлементы n -го уровня, любой из этих суперэлементов может быть разбит на некоторое количество суперэлементов от $(n-1)$ -го до первого уровня, состоящих только из базисных конечных элементов (суперэлементов нулевого уровня).

При объединении нескольких суперэлементов $(t-1)$ -го уровня в суперэлемент t -го уровня система уравнений равновесия соответствующей подконструкции может быть представлена в виде

$$KZ = F, \quad (6.56)$$

где K — общая матрица жесткости подструктуры, состоящей из нескольких суперэлементов $(t+1)$ -го уровня; Z — вектор узловых перемещений подструктуры; F — вектор узловых нагрузок, действующих на подструктуру.

После разделения узловых перемещений (неизвестных) на внутренние (i) и граничные (расчетные) (l) выражение (6.56) можно представить в блочном виде:

$$\bar{K}\bar{Z} = \bar{F}, \quad (6.57)$$

где

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{il} \\ K_{li} & K_{ll} \end{bmatrix} -$$

общая матрица жесткости подструктуры с перенумерованными неизвестными;

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_l \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_l \end{bmatrix} -$$

векторы узловых перемещений и узловых нагрузок с перенумерованными компонентами; Z_i — вектор перемещений внутренних узлов; Z_l — вектор перемещений граничных узлов; F_i — вектор нагрузок, приложенных к внутренним узлам; F_l — вектор нагрузок, приложенных к граничным узлам; K_{st} — блоки матрицы жесткости, соответствующие реакциям в связях узлов t при единичных смещениях узлов s .

Здесь под внутренними понимают узлы, неизвестные перемещения которых исключаются. Соответственно под граничными понимают все узлы, неизвестные перемещения которых подлежат определению (расчетные узлы).

После исключения из зависимости (6.57) вектора внутренних перемещений подконструкции

$$[K_{ll} - K_{li}K_{ii}^{-1}K_{il}]Z_l = F_l - K_{li}K_{ii}^{-1}F_i,$$

или $\bar{K}_{ll}Z_l = \bar{F}_l$, где $\bar{K}_{ll} = K_{ll} - K_{li}K_{ii}^{-1}K_{il}$ — матрица граничных жесткостей суперэлемента t -го уровня; $\bar{F}_l = F_l - K_{li}K_{ii}^{-1}F_i$ — вектор

граничных узловых нагрузок для суперэлемента t -го уровня.

Процесс исключения неизвестных группы i в системе уравнений (6.56) называется *статической конденсацией неизвестных к граничным узлам суперэлемента*. Его результатом является преобразование матриц жесткостей и векторов узловых нагрузок суперэлементов $(t-1)$ -го уровня в матрицу жесткости и вектор узловых нагрузок суперэлемента t -го уровня. Этот процесс начинается с суперэлемента нулевого уровня и повторяется до тех пор, пока не будет сформирована матрица жесткости суперэлемента n -го уровня, т. е. всей конструкции в целом.

На обратном ходе, начинающемся с рассмотрения суперэлемента высшего уровня, по известным граничным перемещениям находят из (6.57) перемещения всех внутренних узлов суперэлементов:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_i - \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{it} \mathbf{Z}_t. \quad (6.58)$$

С помощью обычной процедуры МКЭ по найденному полному вектору перемещений (6.58) для всех суперэлементов нулевого уровня (базисных конечных элементов) вычисляют компоненты их напряженного состояния.

6.5.3. Варианты общей схемы конденсации неизвестных в граничных узлах суперэлемента

Для того чтобы записать уравнение (6.56) в форме (6.57), проводят оптимальную перенумерацию внутренних узлов подструктуры и им присваивают новые номера от единицы до m , где m — общее количество внутренних узлов подструктуры. Граничным узлам присваивают последние номера от $m+1$ до n , где n — общее количество узлов в рассматриваемой подструктуре.

Переход от формы записи (6.56) к форме (6.57) с перенумерованными неизвестными выполняют с помощью специальной матрицы преобразования, имеющей тот же порядок, что и матрица жесткости $\mathbf{K}$ в (6.56). Матрицу преобразования строят путем перестановки единиц из каждого столбца единичной матрицы в другую строку, соответствующую новому номеру неизвестного.

Пусть, например, матрица $\mathbf{K}$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix}.$$

Неизвестные $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_3$ принимают за граничные, а $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_4$ — за внутренние. Их перенумерация выглядит так: $\mathbf{Z}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_3$, $\mathbf{Z}_3 = \tilde{\mathbf{Z}}_4$, $\mathbf{Z}_2 = \tilde{\mathbf{Z}}_1$, $\mathbf{Z}_4 = \tilde{\mathbf{Z}}_2$. Соответственно единичная матрица четвертого

порядка преобразуется к следующему виду:

$$\tilde{E}_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Выполнение операции $\tilde{E}K\tilde{E}^*$ приводит к получению матрицы

$$\tilde{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} K_{22} & K_{24} & K_{21} & K_{23} \\ K_{42} & K_{44} & K_{41} & K_{43} \\ \hline K_{12} & K_{14} & K_{11} & K_{13} \\ K_{32} & K_{34} & K_{31} & K_{33} \end{array} \right]$$

с требуемой структурой блоков.

Реальные конструкции, как правило, обладают симметрией и регулярностью, т. е. имеют в своем составе повторяющиеся элементы или блоки. Использование этих свойств при построении матриц жесткости и узловых нагрузок для суперэлементов различных уровней дает большой эффект в смысле экономичности вычислительного процесса. Особенно наглядно это проявляется при так называемой «одномерной» схеме синтеза суперэлементов (рис. 6.28), когда процесс построения суперэлементов ускоряется за счет их удвоения, т. е. сращивания двух одинаковых элементов предыдущего уровня [77]. На рисунке показано, как за три удвоения получен суперэлемент СЭ-III, имеющий длину восьми суперэлементов нулевого уровня. Такой процесс построения суперэлементов применяется, например, в расчетах каркасных и высотных панельных зданий, состоящих из повторяющихся элементов.

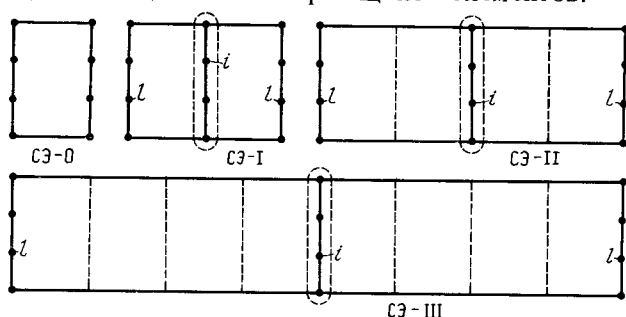


Рис. 6.28. Схема синтеза суперэлементов

В некоторых случаях более удобным и эффективным оказывается процесс построения не «расширяющегося», а «скользящего» суперэлемента.

На рис. 6.29, а показана «одномерная» конструкция, состоящая из нескольких соединенных между собой суперэлементов нуле-

вого уровня. Объединение двух суперэлементов нулевого уровня (рис. 6.29, б) в один суперэлемент (рис. 6.29, в) и исключение неизвестных на верхней границе дает суперэлемент первого уровня, имеющий ту же длину, что и суперэлемент нулевого уровня. Повторяя при последовательном наращивании суперэлемента операцию исключения узлов на верхней границе синтезируемого суперэле-

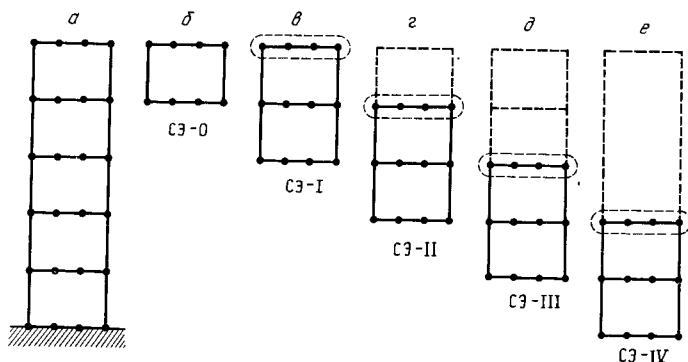


Рис. 6.29. Процесс построения «скользящего» суперэлемента

мента (рис. 6.29, г, д), приходят в итоге к суперэлементу последнего уровня (СЭ-IV на рис. 6.29, е), имеющему ту же длину, что и все элементы предыдущего уровня.

Преимуществом такого процесса перед процессом расширения суперэлемента является лучшая обусловленность матрицы коэффициентов получаемой разрешающей системы уравнений метода суперэлементов.

Пример 6.12. Найти частоты и формы свободных колебаний суперэлемента. Запишем уравнение свободных колебаний подконструкции

$$(K - \omega_i^2 M)Z = 0 \quad (6.59)$$

и соответствующее ему уравнение для определения собственных значений и собственных векторов

$$|M^{-1}K - \omega_i^2 E| = 0,$$

где

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ - & - \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ - & - \\ M_{ji} & M_{jj} \end{bmatrix}$$

матрица жесткости и матрица масс подконструкции соответственно.

Трудоемкость решения уравнения (6.59) определяется числом независимых перемещений, которые можно разделить на основные (расчетные) Z_i и дополнительные Z_i . Соответственно этому разделению степеней свободы разделены на блоки матрицы K и M в (6.59).

При выполнении статической конденсации неизвестных предполагается, что силы инерции, соответствующие дополнительным степеням свободы, равны нулю. Тогда из первого уравнения (6.59) $K_{ii}Z_i + K_{ij}Z_j = 0$ находим $Z_i = -K_{ii}^{-1}K_{ij}Z_j$, или

$$Z = \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_j \end{bmatrix} = A_j Z_j, \quad (6.60)$$

где

$$A_l = \begin{bmatrix} -K_{ll} & K_{li} \\ E_l \end{bmatrix} -$$

матрица статического преобразования.

С учетом (6.60) получаем следующие выражения для статически конденсированных матриц жесткости и масс подконструкции (суперэлемента):

$$\bar{K}_{ll} = A_l^* K A_l; \quad \bar{M}_{ll} = A_l^* M A_l. \quad (6.61)$$

Далее, решая уравнение

$$|\bar{M}_{ll}^{-1} K_{ll} - \omega_l^2 E_l| = 0, \quad (6.62)$$

находим частоты и формы свободных колебаний подконструкций суперэлемента с уменьшенным числом степеней свободы. Если преобразование (6.61) выполнить неоднократно вплоть до получения суперэлемента уровня всей конструкции, решение уравнения (6.62) даст первые l частот и соответствующих им форм колебаний

7. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Вариационные методы являются наиболее эффективными и распространенными при решении самых разнообразных задач строительной механики. Использование вариационных методов позволяет получить приближенное решение задач строительной механики с любой наперед заданной точностью. При этом отпадает необходимость решения дифференциальных уравнений равновесия или движения заданной системы, а задача сводится к отысканию функций, обеспечивающих минимум некоторого функционала, представляющего собой полную энергию деформации этой системы. Задачи такого типа называются *вариационными*.

С вариационными методами тесно связаны вариационные принципы механики (Лагранжа, Кастильяно, Гамильтона — Остроградского).

Во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения можно заменить задачей об отыскании функции, сообщающей некоторому функционалу наименьшее значение. С другой стороны, при решении вариационных задач из условия минимума функционала можно получить так называемые уравнения Эйлера или Остроградского, которые являются дифференциальными уравнениями, т. е. возможен и обратный переход от вариационной задачи к краевой задаче для дифференциального уравнения. Последний играет важную роль при выводе уравнений равновесия и уравнений движения рассматриваемых систем.

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.1.1. Функционал и его вариация

Величина $J = J[y(x)]$ есть функционал от функции $y(x)$, если каждой функции $y(x)$, принадлежащей некоторому множеству функций $A = \{y(x)\}$, по заданному закону ставится в соответствие определенное число J . Здесь x может быть независимой переменной или совокупностью независимых переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Например, если $A = \{y(x)\}$ — совокупность функций, интегрируемых на отрезке $[0, 1]$, то интеграл

$$J = \int_0^1 y(x) dx$$

можно рассматривать как функционал от функции $y(x)$.

Для определения необходимого и достаточного условия экстремума функционала вводят понятие его вариации.

Пусть задан функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (7.1)$$

причем функции $y(x)$ удовлетворяют условиям

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \quad (7.2)$$

Подставляя различные функции $y(x)$, удовлетворяющие условию (7.2), в функционал (7.1), получают различные значения этого функционала. Если функционал (7.1) имеет минимум, то найдется такая функция $y(x)$, удовлетворяющая условию (7.2), что будет выполняться условие $J[y(x)] \leq J[y(x)]$. Аналогично для максимума должно выполняться условие $J[y(x)] \geq J[y(x)]$.

Если $\eta(x)$ — произвольная кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию $\eta(a) = \eta(b) = 0$, то однопараметрическое семейство функций $\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ при достаточно малых значениях параметра α принадлежит некоторой окрестности функции $y(x)$ ($\tilde{y}$ сколь угодно близка к y).

Пусть функция $y(x)$ доставляет минимум функционалу (7.1), тогда $J[y + \alpha\eta] \geq J[y]$. Функционал

$$J[y + \alpha\eta] = \int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx$$

является функцией параметра α ($J[y + \alpha\eta] = \Phi(\alpha)$) и при $\alpha = 0$ имеет минимум.

Необходимое условие экстремума $\Phi'(0) = 0$, т. е.

$$\left. \frac{dJ[y + \alpha\eta]}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Дифференциал функции $\Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ называется первой вариацией функционала (7.1) и обозначается символом δJ :

$$\delta J = \left. \frac{d\Phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha.$$

Вторая вариация $\delta^2 J$ функционала (7.1) определяется как дифференциал второго порядка функции $\Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \alpha^2.$$

Частный дифференциал функции $\tilde{y} = y + \alpha\eta$ по α при $\alpha = 0$ называется *вариацией функции* и обозначается

$$\delta \tilde{y} = \left. \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha = \alpha\eta.$$

Другими словами, вариация функции $\tilde{y}$ есть разность двух функций, взятых из множества $A = \{y(x)\}$: $\delta y = y - y$.

Таким образом, необходимым условием минимума (максимума) функционала является обращение в нуль его первой вариации $\delta J = 0$. Вторая вариация должна быть в случае минимума неотрицательной ($\delta^2 J \geq 0$), в случае максимума неположительной ($\delta^2 J \leq 0$).

Например, для функционала (7.1) первая и вторая вариации имеют вид:

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx;$$

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} (\delta y')^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 \right) dx$$

$$(\delta y = \alpha \eta, \delta y' = \alpha \eta').$$

7.1.2. Дифференциальные уравнения Эйлера и Остроградского

Используя необходимое условие экстремума функционала $J = J[y(x)]$, можно получить дифференциальное уравнение Эйлера, если x — одна независимая переменная, или дифференциальное уравнение Остроградского, если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — совокупность независимых переменных. Таким образом, можно осуществить переход от вариационной задачи — задачи нахождения функции $y(x)$, дающей экстремум некоторому функционалу, — к краевой задаче для дифференциальных уравнений. Если для заданной системы известно выражение полной энергии деформации, которое является некоторым функционалом, то уравнения Эйлера или Остроградского для этого функционала являются уравнениями равновесия или уравнениями движения данной системы.

Решение основных задач строительной механики основывается на принципах, в которых утверждается стационарность некоторых функционалов. Например, принцип Лагранжа связан с отысканием минимума функционала — полной энергии Э деформации системы — из условия равенства нулю первой вариации этого функционала ($\delta \mathcal{E} = 0$). Ввиду этого проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения, выражающего условие равновесия системы, оказывается эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум функционалу, который выражает энергию системы.

Пусть в функционале (7.1) функция $y(x)$ удовлетворяет условиям: $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$. Первая вариация этого функционала имеет вид

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

Интеграл от второго слагаемого, используя интегрирование по частям, можно преобразовать к виду

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Если учесть, что $\delta y = \alpha \eta(x)$, где $\eta(a) = \eta(b) = 0$, первая вариация

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx = 0$$

обращается в нуль, если функция $y(x)$ дает экстремум функционалу в подинтегральном выражении. Вариация функции δy в силу ее произвольности не равна нулю, следовательно, должно быть

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Это и есть уравнение Эйлера для данного функционала, которому должна удовлетворять функция $y(x)$, дающая минимум (чаще всего) функционалу (7.1).

Для функционала

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u'_x(x, y), u'_y(x, y)) dx dy$$

уравнение Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Пример 7.1. Вывести уравнение равновесия упругой мембраны при малых прогибах и интенсивности нагрузки $q(x, y)$.

Потенциальная энергия деформации такой мембраны выражается интегралом

$$J[u] = \iint_D \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + q(x, y) u \right) dx dy, \quad (7.3)$$

где μ — величина постоянная; $u(x, y)$ — функция прогибов мембраны.

Пусть плоская область D , занимаемая мембраной, ограничена контуром Γ . Необходимо найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в области D вместе с частными производными первого и второго порядков, принимающую на контуре Γ заданные значения $u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$ и дающую интегралу $J[u]$ минимальное значение. Рассмотрим значение функционала (7.3) для функции $u(x, y) + \alpha \eta(x, y)$, где $\eta(x, y)$ — функция, непрерывная вместе с производными первого и второго порядков и равная нулю на контуре Γ .

Для того чтобы функционал (7.3) имел минимум, его первая вариация должна быть равна нулю:

$$\delta J = \iint_D \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta u'_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta u'_y \right) + q \delta u \right) dx dy = 0.$$

Здесь

$$\delta u'_x = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \delta u'_y = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \delta u = \alpha \eta.$$

Используя формулу Грина

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

преобразуем в интеграле первые два члена:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta u \right) \right) dx dy - \\ & - \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \delta u dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \delta u dy - \frac{\partial u}{\partial y} \delta u dx - \iint_D \Delta u \delta u dx dy. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В (7.4) $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа. Контурный интеграл в последнем выражении равен нулю, так как $\eta(x, y)$ на контуре Γ обращается в нуль. Следовательно,

$$\delta J = - \iint_D (\mu \Delta u - q) \delta u dx dy = 0.$$

Поскольку δu произвольна, получаем условие, которому должна удовлетворять функция $u(x, y)$, дающая минимум функционалу (7.3): $\mu \Delta u - q = 0$. Таким образом, получено дифференциальное уравнение Остроградского, которое представляет собой уравнение Пуассона. Это и есть уравнение равновесия упругой мембраны.

7.2. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

7.2.1. Полная энергия деформации упругой системы

Использование вариационных принципов дает возможность не только применять вариационные методы для получения решения конкретных задач строительной механики, но и получать корректную систему уравнений и естественных граничных условий для задач строительной механики.

Потенциальную энергию упругой деформации тела можно представить в виде интеграла по его объему V :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz,$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ — компоненты тензора напряжений; $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — компоненты тензора деформаций.

Полная энергия системы Э записывается как разность потенциальной энергии деформации U и работы внешних сил A :

$$\mathcal{E} = U - A, \quad (7.5)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds + \frac{1}{2} \iiint_V (X u + Y v + Z w) dx dy dz.$$

Здесь X_v , Y_v , Z_v — компоненты поверхностной нагрузки; X , Y , Z — компоненты объемных сил; u , v , w — компоненты перемещений.

В соответствии с вариационным принципом Лагранжа из всех кинематически возможных перемещений упругой системы в действительности реализуются лишь те, которые соответствуют минимуму полной энергии системы. Таким образом, принцип Лагранжа приводит к задаче о минимуме функционала (7.5). Экстремум функционала (7.5) имеет место, когда $\delta \mathcal{E} = 0$, а минимум, — если и вторая вариация неотрицательна ($\delta^2 \mathcal{E} \geq 0$).

В рассматриваемых ниже задачах строительной механики реализуется именно минимум функционала. Если первую вариацию (7.5) приравнять нулю, получится вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \iiint_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \\ & + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz - \iint_S (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS - \\ & - \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Преобразовывая различным образом $\delta \mathcal{E}$, можно получить различные группы уравнений в задачах строительной механики.

7.2.2. Уравнения равновесия упругого тела

Если в уравнение (7.6) подставить вместо деформаций их выражения через перемещения

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

вариационное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \iiint_V \left(\sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \delta \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) dx dy dz - \end{aligned}$$

$$-\iint_S (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS - \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz = 0. \quad (7.7)$$

Теперь нужно провести преобразование уравнения (7.7) относительно вариаций компонентов перемещений δu , δv , δw таким образом, чтобы под знаком тройного интеграла не было вариаций от производных функций перемещений. Для этого понадобится формула Остроградского

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (Pl dy dz + Qm dx dz + Rn dx dy).$$

Здесь l , m , n — направляющие косинусы нормали $\mathbf{v}$ к контуру области S . Так, например, преобразование первого слагаемого в (7.7) дает

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz &= - \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz + \iint_S \sigma_x l \delta u dS \\ &\quad \left(\frac{\partial (\sigma_x \delta u)}{\partial x} = \sigma_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u \right). \end{aligned}$$

Итак, вариационное уравнение (7.7) примет вид

$$\begin{aligned} \delta \Theta &= - \iiint_V \left(\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right) dx dy dz - \\ &\quad - \iint_S ((X_v - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) \delta u + (Y_v - \tau_{yx} l - \\ &\quad - \sigma_y m - \tau_{yz} n) \delta v + (Z_v - \tau_{zx} l - \tau_{zy} m - \sigma_z n) \delta w) dS = 0. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Так как вариации δu , δv , δw произвольны, множители при них должны быть равны нулю. Отсюда получаются уравнения равновесия упругого тела

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и статические граничные условия $X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$; $Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$; $Z_v = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n$.

Если δu , δv , δw считать малыми возможными перемещениями тела в состоянии равновесия, равенство (7.8) будет описывать принцип возможных перемещений, согласно которому в состоянии равновесия тела сумма работ всех внешних и внутренних сил должна быть равна нулю.

Если ввести понятие удельной потенциальной энергии $\bar{u}$ как энергии в единичном объеме, то

$$U = \iiint_V \bar{u} dx dy dz, \quad \delta U = \iiint_V \delta \bar{u} dx dy dz.$$

С другой стороны, согласно (7.6),

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Следовательно,

$$\delta \bar{u} = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (7.9)$$

Но в силу существования потенциала упругих сил потенциальная энергия деформации есть функция только деформаций тела и ее вариация

$$\delta \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \dots + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx}. \quad (7.10)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых вариациях деформаций в (7.9) и (7.10), получают формулы Грина.

Методы вариационного исчисления позволяют получить дифференциальные уравнения равновесия тела, минуя обычный прием составления таких уравнений из условия равновесия бесконечно малого элемента.

7.3. УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

7.3.1. Уравнения равновесия

Вариационные принципы особенно эффективны при выводе уравнений равновесия сложных конструкций, например для пологих оболочек, допускающих прогибы, соизмеримые с толщиной оболочки, деформации которой описываются геометрически нелинейной теорией.

Рассматривается прямоугольная в плане пологая оболочка положительной гауссовой кривизны, выполненная из материала, подчиняющегося закону Гука (рис. 7.1), нагруженная произвольной нагрузкой. Срединную поверхность оболочки принимают за координатную поверхность. Оси x , y направлены по линиям главных кривизн, ось z — по нормали к срединной поверхности в сто-

рону вогнутости оболочки. Предполагаются справедливыми гипотезы Кирхгофа Лява и считается также, что оболочка допускает прогибы, соизмеримые с толщиной.

Связь деформаций и перемещений записывается в виде [19]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

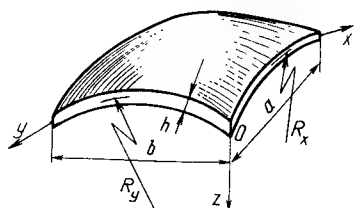


Рис. 7.1. Пологая прямоугольная в плане оболочка

Закон Гука в данном случае:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^z + \nu \varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^z + \nu \varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^z.$$

Здесь

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$k_x = \frac{1}{R_x}, \quad k_y = \frac{1}{R_y}.$$

Усилия и моменты на единичной длине сечения, приведенные к срединной поверхности оболочки:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz,$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz.$$

Выражение полной энергии деформации оболочки будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_x u - p_y v - q w \right) dx dy, \end{aligned}$$

где p_x , p_y , q — составляющие внешней нагрузки; $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Чтобы найти минимум функционала, необходимо приравнять первую вариацию нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{D} = & \int_0^a \int_0^b \left(N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ & + N_x \left(-k_x \delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_y \left(-k_y \delta w + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) - M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ & \left. - 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_x \delta u - p_y \delta v - q \delta w \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Это вариационное уравнение нужно преобразовать так, чтобы под знаком двойного интеграла не было вариации производных от компонентов перемещений u , v , w . Так, например,

$$\int_0^a \int_0^b N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \int_0^b N_x \delta u \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u dx dy.$$

В результате получается вариационное уравнение

$$\begin{aligned} - \int_0^a \int_0^b & \left(\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y \right) \delta v + \right. \\ & + \left(N_x \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_y \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \left. \right) \delta w \Big) dx dy + \int_0^b \left(N_x \delta u + N_{xy} \delta v + \right. \\ & + \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w - \\ & \left. - M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \left(N_{xy} \delta u + N_y \delta v + \right. \\ & + \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w - \\ & \left. - M_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - 2M_{xy} \delta w \Big|_{x=0}^{x=a} \Big|_{y=0}^{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Так как вариации δu , δv , δw произвольные, множители при них должны быть равны нулю. Таким образом, уравнения равновесия оболочки имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0; \\ N_x \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_y \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Вариационное уравнение (7.11) позволяет сформулировать и граничные условия на кромке оболочки. Так, при $x=0$ и $x=a$

$$\left. \begin{aligned} N_x=0 \text{ или } u=u^*; \quad N_{xy}=0 \text{ или } v=v^*; \\ N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ или } w=w^*; \\ M_x=0 \text{ или } \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

При $y=0$ и $y=b$

$$\left. \begin{aligned} N_{xy}=0 \text{ или } u=u^*; \quad N_y=0 \text{ или } v=v^*; \\ N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \text{ или } w=w^*; \\ M_y=0 \text{ или } \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Кроме того, в угловых точках при $x=0$ $y=0$ или $y=b$; при $x=a$ $y=0$ или $y=b$;

$$M_{xy}=0 \text{ или } w=w^*. \quad (7.15)$$

7.3.2. Уравнения движения

На основании вариационного принципа Гамильтона — Остроградского можно получить уравнение движения полой оболочки [18].

Если рассматривать процесс движения на отрезке времени $[t_0, t_1]$, то истинные траектории должны отличаться от других возможных траекторий тем, что для них выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta A) dt = 0.$$

Здесь δK — вариация кинетической энергии системы; δU — вариация потенциальной энергии системы; δA — сумма элементарных работ внешних сил.

Кинетическая энергия оболочки

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \int_0^b \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx dy dz,$$

где ρ — плотность материала оболочки.

Вариация δK будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta K = \rho h \int_0^a \int_0^b & \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \delta \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Необходимо преобразовать это выражение так, чтобы под знаком интеграла не было вариаций от производных функций u , v , w :

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} \delta K dt = -\rho h \int_t^{t_1} \int_0^a \int_0^b & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dx dy dt + \\ + \rho h \int_0^a \int_0^b & \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dx dy \Big|_{t-t_1}^{t-t_1}. \end{aligned}$$

Вариация $\delta U - \delta A = \delta \mathcal{E}$ рассмотрена выше.

После преобразований получается вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} \int_0^a \int_0^b & \left(\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u + \right. \\ & + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v + \\ & + \left(N_x k_x + N_y k_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \Big) dx dy dt + \\ + \rho h \int_0^a \int_0^b & \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) \Big|_{t-t_1}^{t-t_1} dx dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^b \left(N_x \delta u + N_{xy} \delta v + \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w - M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} dy dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left(N_y \delta v + N_{xy} \delta u + \right. \\
& \left. + \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w - \right. \\
& \left. - M_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} M_{xy} \delta w \Big|_{x=0}^{x=a} \Big|_{y=0}^{y=b} dt = 0. \quad (7.16)
\end{aligned}$$

Поскольку вариации δu , δv , δw произвольные, уравнения движения оболочки будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
& N_x k_x + N_y k_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \\
& + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}$$

Вариационное уравнение (7.16) позволяет сформулировать также граничные условия (они будут иметь вид (7.13) — (7.15)) и начальные условия: при $t=t_0$ $\partial u / \partial t = 0$ или $u = u^*$, $\partial v / \partial t = 0$ или $v = v^*$, $\partial w / \partial t = 0$ или $w = w^*$.

7.4. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

7.4.1. Общая характеристика прямых методов

Пусть задан функционал

$$J = J[y(x)], \quad (7.17)$$

определенный на множестве $A = \{y(x)\}$, $x \in D$.

Методы, позволяющие свести задачу нахождения экстремумов функционала (7.17) к задаче нахождения экстремумов функции многих переменных, т. е. к решению систем линейных алгебраических уравнений, называются *прямыми методами*.

Пусть $y^*(x)$ — точное решение вариационной задачи, а $J[y^*(x)] = m$ — значение минимума. Если удастся построить функцию $\bar{y}(x)$, для которой значение функционала (7.17) весьма близко к m , то считают, что найдено достаточно хорошее приближение к истинному решению задачи. Если же удастся найти минимизирующую последовательность $\bar{y}_n(x)$, т. е. последовательность функций, для которых $J[\bar{y}_n(x)] \rightarrow m$, эта последовательность будет сходиться к точному решению $y^*(x)$.

7.4.2. Метод Ритца

Пусть нужно найти минимум функционала (7.17) на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$y|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad (7.18)$$

где Γ — граница области D , в которой рассматриваются функции $y(x)$.

Приближенное решение задачи $\bar{y}(x)$ находят в виде семейства функций

$$\bar{y} = \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (7.19)$$

зависящих от нескольких параметров и удовлетворяющих условию (7.18).

Если подставить (7.19) в (7.17), функционал $J[\bar{y}(x)]$ будет функцией n переменных: $J = J(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Условия, при которых эта функция имеет минимум:

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (7.20)$$

Решив систему уравнений (7.20), которую называют системой уравнений Ритца, находят значения параметров $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$. Следовательно, приближенное решение вариационной задачи (7.17), (7.18) имеет вид $\bar{y}(x) = \Phi(x, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n)$.

Практически процесс нахождения этого приближенного решения весьма прост, так как семейство (7.19) принимается линейно зависящим от $c_1, c_2, \dots, c_n$. Поэтому уравнения (7.20) оказываются линейными уравнениями, и число их зачастую невелико. Семейство функций (7.19) принимают в виде

$$y(x) = y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_0(x)$ удовлетворяет на контуре неоднородным краевым условиям (7.18), а функции $\varphi_i(x)$ — однородным условиям $\varphi_i(x)|_{\Gamma} = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Последовательность функций $\{\varphi_i(x)\}$ должна удовлетворять двум условиям [53]: 1) при любом n функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$

должны быть линейно независимы, 2) последовательность $\{\varphi_i(x)\}$ должна быть полной по энергии. Под этим понимается следующее: каковы бы ни были $y \in H_A$, где H_A — энергетическое пространство и $\varepsilon > 0$, можно найти такое натуральное число N и такие постоянные $a_1, a_2, \dots, a_N$, что выполняется неравенство

$$\left| y - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right| < \varepsilon.$$

Функции $\varphi_i(x)$ называют *аппроксимирующими* или *координатными функциями*.

Пример 7.2. Найти выражение для прогиба $w(x, y)$ тонкой упругой пластины, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q .

Задача об изгибе тонкой пластины, защемленной по контуру, равносильна вариационной задаче о минимуме функционала

$$J[w] = \iint_{\Omega} \left((\Delta w)^2 - \frac{2q}{D} w \right) dx dy \quad (7.21)$$

при условиях

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (7.22)$$

Здесь $w(x, y)$ — прогиб пластины; Γ — граница области Ω , занимаемой пластиной; q — параметр поперечной нагрузки; D — цилиндрическая жесткость пластины; ν — внешняя нормаль к границе Γ ; Δ — оператор Лапласа.

Пусть пластина занимает область $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Решение поставленной задачи будем искать методом Ритца. Так как функция $\varphi_1(x, y) = (1-x^2)^2(1-y^2)^2$ удовлетворяет краевым условиям (7.22), приближенное решение примем в виде $w_1 = (1-x^2)^2(1-y^2)^2 c_1$. Подставив w_1 в функционал (7.21), получим

$$\begin{aligned} J[w_1] = & 144c_1^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) (1-y^2)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) (1-x^2)^2 \right)^2 dx dy - \\ & - \frac{2q}{D} c_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Система уравнений Ритца в данном случае состоит из одного уравнения $\partial J[w_1] / \partial c_1 = 0$. После вычисления определенных интегралов в выражении $J[w_1]$ получим $106,998c_1 = 1,321q/D$, откуда $c_1 = 0,0123q/D$. Таким образом, приближенно прогиб пластины описывается функцией $w_1 = 0,0123(1-x^2)^2(1-y^2)^2 q/D$.

Пример 7.3. Найти приближенное решение задачи о равномерном свободном кручении призматического стержня квадратного сечения (рис. 7.2) методом Ритца.

Рассмотрим стержень квадратного сечения, ограниченного прямыми $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$. Задача о кручении такого стержня сводится к нахождению функции $u(x, y)$, дающей минимум функционалу

$$J[u] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy \quad (7.23)$$

при краевом условии на контуре

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (7.24)$$

Здесь $u(x, y)$ только постоянным множителем отличается от функции напряжений в поставленной задаче о кручении стержня.

В силу симметрии задачи приближенное решение примем в виде, удовлетворяющем условию (7.24):

$$u_2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(c_1 + c_2(x^2 + y^2)). \quad (7.25)$$

Подставим (7.25) в функционал (7.23) и найдем частные производные $\partial J[u_2]/\partial c_1$ и $\partial J[u_2]/\partial c_2$. Приравняв их нулю, получим после интегрирования следующую систему уравнений Ритца:

$$\begin{cases} (256/45)c_1 + (1024/525)c_2 = 16/9; \\ (1024/525)c_1 + (11264/4725)c_2 = 32/45, \end{cases}$$

Рис. 7.2. К расчету призматического стержня

решая которую, находим $c_1 = 0,292$; $c_2 = 0,0592$. Следовательно, приближенное решение задачи (7.23), (7.24) имеет вид $u_2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(0,292 + 0,0592(x^2 + y^2))$.

7.4.3. Вариационно-разностный метод

Этот метод заключается в том, что функционал, например

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (7.26)$$

$$(y(a) = y_0, y(b) = y_1),$$

рассматривается на негладких функциях, составленных из определенного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин. Для этого отрезок $[a, b]$ разбивается на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ($x_0 = a, x_n = b$). В точках x_i производные $y'_i = y'(x_i)$ заменяют конечными разностями (см. § 4.4). При этом функционал превращается в функцию ординат y_i вершин указанных ломаных ($J[y] = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$) и дальнейшая процедура минимизации производится так же, как и в методе Ритца, т. е. $\partial \Phi / \partial y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Интеграл (7.26) заменяют интегральной суммой по формуле прямоугольников. В результате находят табличное значение функции $y(x)$, дающей минимум функционалу (7.26).

Пример 7.4. Используя вариационно-разностный метод, найти функцию, дающую минимум функционалу

$$J[y] = \int_0^1 (A(y')^2 - Fxy) dx \quad (y(0) = 0, y(1) = F_c/A).$$

Эта задача связана с задачей о растяжении стержня, закрепленного на одном конце, равномерно распределенной по длине стержня силой F_x , где $y(x)$ — перемещение точек сечения стержня вдоль оси x .

Отрезок $[0, 1]$ разбиваем на 5 частей точками $x_i = 0,2i$ ($i=0, 1, \dots, 5$). При этом $y_0 = y(0) = 0$, $y_1 = y(0,2)$, $y_2 = y(0,4)$, $y_3 = y(0,6)$, $y_4 = y(0,8)$, $y_5 = y(1) = F_x/A$.

Производные $y'(x)$ нужно заменить конечными разностями:

$$y'_0 = \frac{y_1 - 0}{0,2}, \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{0,2}, \quad y'_2 = \frac{y_3 - y_2}{0,2}, \quad y'_3 = \frac{y_4 - y_3}{0,2}, \quad y'_4 = \frac{F_x/A - y_4}{0,2}.$$

Заданный функционал заменяется суммой по формуле прямоугольников и становится функцией четырех переменных:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(A \left(\frac{y_1}{0,2} \right)^2 + A \left(\frac{y_2 - y_1}{0,2} \right)^2 - F_x y_1 + \right. \\ \left. + A \left(\frac{y_3 - y_2}{0,2} \right)^2 - F_x y_2 + A \left(\frac{y_4 - y_3}{0,2} \right)^2 - F_x y_3 + A \left(\frac{F_x/A - y_4}{0,2} \right)^2 - F_x y_4 \right) 0,2.$$

Необходимые условия минимума указанной функции будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= A \frac{2y_1}{0,04} - A \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} - F_x = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= A \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} - A \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} - F_x = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} &= A \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} - A \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} - F_x = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= A \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} - A \frac{2(F_x/A - y_4)}{0,04} - F_x = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений дает искомые значения функции $y(x)$ в точках x_i : $y_1 = 0,24F_x/A$; $y_2 = 0,46F_x/A$; $y_3 = 0,66F_x/A$; $y_4 = 0,84F_x/A$.

7.4.4. Метод конечных элементов как частный случай метода Ритца

Метод конечных элементов (МКЭ) можно рассматривать как частный случай метода Ритца. В методе Ритца каждую аппроксимирующую функцию задают во всей области D . Поэтому, если область D не прямоугольная или граничные условия сложные, довольно трудно подобрать аппроксимирующие функции, так как они должны удовлетворять граничным условиям. Кроме того, матрица коэффициентов системы уравнений Ритца (7.20) является полной матрицей и может быть плохо обусловленной.

Главное отличие МКЭ от метода Ритца заключается в подборе аппроксимирующих функций. В МКЭ искомая функция $y(x)$ аппроксимируется в виде сплайнов, что для областей D произвольного вида может быть выполнено достаточно просто. Особенность аппроксимирующих функций здесь состоит в том, что каждая из них отлична от нуля только в некоторой подобласти из области D . Это обуславливает разреженность и ленточную структуру матрицы

коэффициентов системы уравнений Рунге и хорошую ее обусловленность.

Однако при увеличении числа аппроксимирующих функций в приближенном решении $y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_{ni}(x)$ необходимо изменить все функции $\varphi_{ni}(x)$. Поэтому эти функции имеют два индекса: первый из них определяет общее число аппроксимирующих функций, а второй — порядковый номер этой функции. В методе Рунге добавление аппроксимирующих функций в решение $y_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ не требует изменения ранее принятых функций $\varphi_i(x)$.

Пусть область, занимаемая конструкцией, разбита на части (рис. 7.3): $[x_{i-1}, x_i]$ — для одномерной области (рис. 7.3, а), D_i — для двухмерной области (рис. 7.3, б) и V_i — для трехмерной области (рис. 7.3, в).

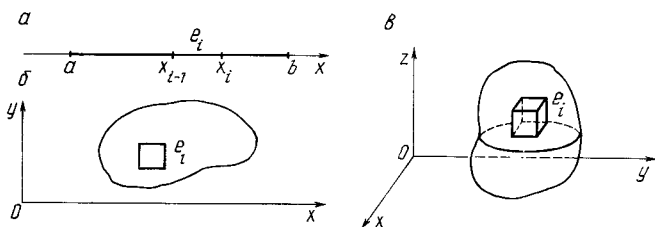


Рис. 7.3. Конечные элементы:

а — для одномерной области; б — двумерной; в — трехмерной

В общем случае говорят, что область разбита на части V_i , не конкретизируя размерность области. Разбивка конструкции на конечные элементы производится в зависимости от ее вида, наличия неоднородности по толщине, вида нагрузок и закрепления границ, требуемой точности расчета. Область V_i с определенными связями в узлах области — это элемент (его обозначают e_i).

Алгоритм расчета по МКЭ состоит в следующем.

1. Область V разбивают на части V_i ($V = \sum_{i=1}^N V_i$). В каждой части области V_i задают элемент e_i с определенными связями, накладываемыми на искомую функцию (функции). Разбивка области уже зависит от выбранного элемента (треугольный, четырехугольный, в виде тетраэдра и т. д.).
2. Искомая функция $y(x)$ ($y \in V$) должна удовлетворять определенным условиям на границе области V и давать минимум функционалу

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} F(y) dV, \quad (7.27)$$

который определяет полную энергию деформации рассматриваемой конструкции.

3. Для каждого элемента e_i функцию y аппроксимируют полиномом $P_{Ni}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$. Исходя из связей между элементами или граничных условий, определяют неизвестные коэффициенты α_i для каждого элемента (α_i выражают через значения искомой функции $y(x)$ и ее производных в узлах разбиения, т. е. через узловые неизвестные).

Таким образом,

$$y(x) = \sum_{i=1}^N y^i(x) \quad \text{при } x \in V;$$

$$y^i(x) = \begin{cases} P_{Ni}(x) & \text{при } x \in e_i, \\ 0 & \text{при } x \notin e_i; \end{cases}$$

$$P_{Ni}(x) = \sum_{j=1}^r c_i^j \varphi_{Ni}^j.$$

Здесь c_i^j — значения узловых неизвестных; φ_{Ni}^j — известные многочлены переменной x (аппроксимирующие функции); N — общее число конечных элементов.

Теперь (7.27) записывается в виде

$$\Theta = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} F\left(\sum_{j=1}^r c_i^j \varphi_{Ni}^j\right) dV.$$

4. Для определения неизвестных c_i^j составляют систему уравнений (7.20):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_m^k} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \frac{\partial F\left(\sum_{j=1}^r c_i^j \varphi_{Ni}^j\right)}{\partial c_m^k} dV = 0 \quad (k=1, 2, \dots, r; m=1, 2, \dots, N). \quad (7.28)$$

Так как $\varphi_{Nm}^k \neq 0$ только в пределах элемента e_m , матрица коэффициентов системы уравнений (7.28) будет разреженной (содержащей много нулей). Следовательно, она будет лучше обусловлена, чем соответствующая матрица в методе Рунца.

Рассмотрим построение координатных функций в МКЭ.

Пусть функционал $\Theta[y]$ содержит производные искомой функции $y(x)$ до m -го порядка. Значит, при переходе от одного элемента к другому нужно обеспечить непрерывность функции $y(x)$ и ее производных только до $m-1$ -го порядка включительно. Поэтому степень каждого полинома $P_{Ni}(x)$ должна удовлетворять зависимости $n+1 \geq 2m$, и для определения неизвестных параметров α_i среди $n+1$ условий для каждого i -го элемента будут содержаться следующие $2m$ условий:

$$\frac{\partial^j P_{Ni}(x_{i-1})}{\partial x^j} = \frac{\partial^j y(x_{i-1})}{\partial x^j}; \quad \frac{\partial^j P_{Ni}(x_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j y(x_i)}{\partial x^j} \\ (j=0, 1, \dots, m-1).$$

Для аппроксимации функции $y(x)$ в области V используют сплайн-интерполяцию (см. § 1.2.2). Например, при нахождении МКЭ минимума функционала

$$J[y] = \int_0^l (A(y')^2 - F_x y) dx,$$

который выражает полную энергию деформации растянутого стержня, необходимо искомую функцию $y(x)$ на отрезке $[0, l]$ заменить сплайном, построенным в примере 1.5.

Пример 7.5. Используя МКЭ, определить прогиб $w(x)$ балки со ступенчато изменяющейся толщиной, шарнирно закрепленной на концах и нагруженной поперечной нагрузкой интенсивности q (рис. 7.4); $I_1 = 0,00025 \text{ м}^4$ и $I_2 = 0,002 \text{ м}^4$ — моменты инерции соответственно первого и второго участков стержня ($\Delta I = I_2 - I_1 = 0,00175 \text{ м}^4$).

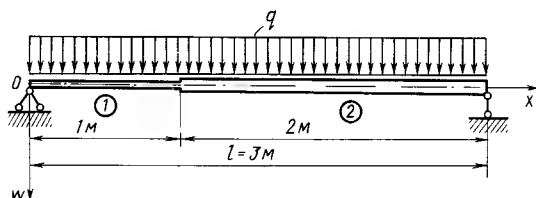


Рис. 7.4. Балка со ступенчато изменяющейся высотой

Полная энергия деформации такой балки

$$\mathfrak{E}[w] = \int_0^1 \left(\frac{EI_1}{2} (w'')^2 - qw \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{EI_2}{2} (w'')^2 - qw \right) dx \quad (7.29)$$

$$(w(0) = w''(0) = 0, w(3) = w''(3) = 0).$$

Балка представлена в виде двух конечных элементов. Один занимает участок $[0, 1]$, другой — $[1, 3]$. Граничная точка $x=1$ этих элементов выбрана не случайно. В этой точке есть особенность — ступенчато меняется толщина балки. Чтобы построить сплайн для функции $w(x)$, на каждом из конечных элементов эту функцию нужно аппроксимировать полиномом P_{2i} , степень которого равна 3, так как $m=2$. Следовательно, $P_{2i}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$.

Для определения неизвестных параметров α_i имеем условия: при $i=1$, т. е. на первом элементе (отрезке $[0, 1]$), $P_{21}(0) = 0$, $P'_{21}(0) = 0$, $P_{21}(1) = w_1$, $P'_{21}(1) = w'_1$ (здесь $w_1 = w(1)$, $w'_1 = w'(1)$); при $i=2$, т. е. на втором элементе (отрезке $[1, 3]$), $P_{22}(3) = 0$, $P'_{22}(3) = 0$, $P_{22}(1) = w_1$, $P'_{22}(1) = w'_1$.

Итак,

$$P_{21}(x) = w_1(1,5x - 0,5x^3) + w'_1(-0,5x + 0,5x^3) =$$

$$= \sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i(x), \quad c_1 = w_1, \quad c_2 = w'_1 \quad (x \in [0, 1]);$$

$$P_{22}(x) = w_1 \left(\frac{9}{16} + \frac{15}{16}x - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right) +$$

$$+ w'_1 \left(-\frac{15}{8} + \frac{23}{8}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right) = \sum_{i=1}^2 c_i \psi_i(x) \quad (x \in [1, 3]).$$

Искомая функция $w(x) = P_{21}(x) + P_{22}(x)$. Вид интерполирующих полиномов $P_{21}(x)$ и $P_{22}(x)$ показан на рис. 7.5. При $x=1$ найденная функция и ее первая производная непрерывны, а вторая производная имеет разрыв.

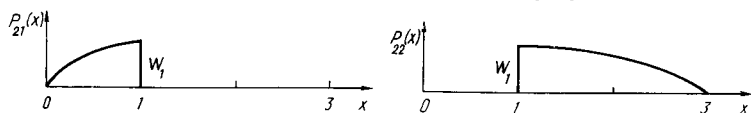


Рис. 7.5. Вид интерполирующих полиномов $P_{21}(x)$ и $P_{22}(x)$

Функционал (7.29) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta = & \int_0^1 \left(\frac{EI_1}{2} (P_{21}'')^2 - qP_{21} \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{EI_2}{2} (P_{22}'')^2 - \right. \\ & \left. - qP_{22} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{EI_1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i'' \right)^2 - q \sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i \right) dx + \\ & + \int_1^3 \left(\frac{EI_2}{2} \left(\sum_{i=1}^2 c_i \psi_i'' \right)^2 - q \sum_{i=1}^2 c_i \psi_i \right) dx. \end{aligned}$$

В соответствии с процедурой Ритца c_k находим из условия (7.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial c_k} = & \int_0^1 \left(EI_1 \sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i'' \varphi_k'' - q \varphi_k \right) dx + \\ & + \int_1^3 \left(EI_2 \sum_{i=1}^2 c_i \psi_i'' \psi_k'' - q \psi_k \right) dx = 0 \quad (k=1, 2). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Уравнение (7.30) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^2 c_i A_{ik} = B_k, \quad (7.31)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ik} = & \int_0^1 I_1 \varphi_i'' \varphi_k'' dx + \int_1^3 I_2 \psi_i'' \psi_k'' dx; \\ B_k = & \frac{q}{E} \left(\int_0^1 \varphi_k dx + \int_1^3 \psi_k dx \right). \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (7.31), находим: $c_1 = 1370,37q/E$, $c_2 = -240,74q/E$. Следовательно,

$$\begin{aligned} w(x) = & \\ = & (1370,37(1,5x - 0,5x^3) - 240,74(-0,5x + \\ & + 0,5x^3)) \frac{q}{E} \text{ при } x \in [0, 1]; \end{aligned}$$

$$\omega(x) = \left(1370,37 \left(\frac{9}{16} + \frac{15}{16}x - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right) - \right. \\ \left. - 240,74 \left(-\frac{15}{8} + \frac{23}{8}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right) \right) \frac{q}{E} \text{ при } x \in [1, 3].$$

Например, $\omega(1) = 1370,37q/E$, $\omega(2) = 851,85q/E$, $\Delta M(1) = 0,13q$, где $\Delta M(1)$ — разность моментов справа и слева от точки $x=1$.

Табл. 7.1. Результаты расчета балки ступенчато-переменной толщины

Решение	$\omega(1) \frac{E}{q}$	$\omega(2) \frac{E}{q}$	$\Delta M(1) \frac{1}{q}$
МКЭ	1370	852	0,13
Методом Ритца при			
$N=2$	678	562	1,633
$N=24$	1273	866	2,418
Точное	1333	896	0

В табл. 7.1 представлены результаты решения поставленной задачи при различных N . В последнем столбце таблицы даны значения скачка момента в месте ступенчатого изменения высоты балки (при $x=1$). Наличие этого скачка в результатах говорит о погрешностях решения.

Сравнивая решения, полученные МКЭ и методом Ритца, можно заметить, что в данном случае сходимость метода Ритца слабая. Это связано с наличием нерегулярности по высоте балки. Следует сказать, что для гладкого стержня уже при $N=2$ получаем результат, близкий к точному. Таким образом, при наличии особенностей необходимо выбирать для решения методы, учитывающие эти особенности.

7.5. МЕТОД ВЛАСОВА — КАНТОРОВИЧА

7.5.1. Сведение задач для уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям

При решении задач строительной механики, связанных с расчетом пластин, оболочек и других пространственных конструкций, соответствующие функционалы являются двойными или тройными интегралами. Метод Власова — Канторовича позволяет свести задачу о минимуме двойного или тройного интеграла к задаче о минимуме простого интеграла. Метод, позволяющий понизить размерность задачи, был почти одновременно предложен Л. В. Канторовичем [38] и В. З. Власовым [16], но с разных позиций. Если в методе Ритца в качестве коэффициентов разложения искомой функции по координатным функциям принимаются неизвестные постоянные параметры, то в методе Власова — Канторовича решение разыскивается в такой форме, что в его состав входят неизвестные функции одного переменного. Преимущество этого метода, кроме большей точности, еще и в том, что лишь часть выражения, дающего решение, выбирается априорно, а другая часть определяется в соответствии с характером задачи. Поэтому этот метод занимает промежуточное положение между точным решением задачи и методом Ритца.

Пусть заданы функционал

$$J[u(x, y)] = \iint_D F(u) dx dy \quad (7.32)$$

и условие

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (7.33)$$

где Γ — граница области D .

Необходимо найти функцию $u(x, y)$, дающую минимум функционалу (7.32) и удовлетворяющую условию (7.33).

Решение поставленной задачи в соответствии с методом Власова — Канторовича находят в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \varphi_i(x, y), \quad (7.34)$$

где $\varphi_i(x, y)$ — известные (координатные) функции, удовлетворяющие условию (7.33); $f_i(x)$ — искомые.

Если область D прямоугольная, можно принять

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \varphi_i(y).$$

Если теперь (7.34) подставить в (7.32), то после вычисления интегралов по переменной y получится функционал, зависящий от функций одной переменной $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Таким образом, задача свелась к определению минимума простого интеграла

$$J[f_1, f_2, \dots, f_n] = \int_a^b \Phi(f_1, f_2, \dots, f_n) dx.$$

Система уравнений Ритца теперь принимает вид

$$\frac{\partial J}{\partial f_j} = \int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial f_j} dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (7.35)$$

Это будет система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 7.6. Используя метод Власова — Канторовича, найти решение задачи о равномерном свободном кручении призматического стержня прямоугольного сечения (см. пример 7.3).

Эта задача сводится к задаче о минимуме функционала

$$\mathfrak{E}[u] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2u \right) dx dy \quad (7.36)$$

при условии, что u на границе области обращается в нуль. В соответствии с методом Власова — Канторовича решение ищем в виде [38]: $u = (b^2 - y^2) u_1(x)$. Подставив u в (7.36) и вычислив интегралы по переменной y , получим

$$\mathfrak{E}[u_1] = \int_a^a \left((u_1')^2 \frac{16b^5}{15} + (u_1)^2 \frac{8b^5}{3} - u_1 \frac{8b^3}{3} \right) dx. \quad (7.37)$$

Функционал (7.37) зависит от функции u_1 одной переменной x . Таким образом, задача о минимуме двойного интеграла свелась к задаче о минимуме простого интеграла.

Условие стационарности функционала (7.37) приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u_1'' - \frac{5}{2b^2} u_1 = -\frac{5}{4b^2}.$$

Решение этого уравнения при граничных условиях $u_1(-a) = u_1(a) = 0$ имеет вид

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2,5} \frac{x}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2,5} \frac{a}{b}\right)} \right).$$

Следовательно,

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (b^2 - y^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2,5} \frac{x}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2,5} \frac{a}{b}\right)} \right).$$

7.5.2. Метод Власова — Канторовича в форме метода Галеркина

Уравнения метода Власова — Канторовича (7.35) можно записать в форме уравнений метода Галеркина.

При решении статических задач для пластин и пологих оболочек функционал полной энергии их деформации

$$J[u(x, y), v(x, y), w(x, y)] = \int_0^a \int_0^b F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) dx dy, \quad (7.38)$$

где u, v, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль осей координат x, y и z соответственно; a, b — размеры оболочки в плане.

Используя метод Власова — Канторовича, можно искомые функции перемещений представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u_n(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{u}_k(x) \varphi_k(y) + \varphi_0(y); \\ v_n(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{v}_k(x) \psi_k(y) + \psi_0(y); \\ w_n(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{w}_k(x) \chi_k(y) + \chi_0(y), \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

где $\varphi_k(y), \psi_k(y), \chi_k(y)$ — известные координатные функции; $\bar{u}_k(x), \bar{v}_k(x), \bar{w}_k(x)$ — подлежащие определению (функции $\varphi_0(y)$,

$\psi_0(y)$, $\chi_0(y)$ удовлетворяют неоднородным краевым условиям, а $\varphi_k(y)$, $\psi_k(y)$, $\chi_k(y)$ — однородным).

Подставив выражения (7.39) в функционал (7.38) и проведя интегрирование по y , можно получить функционал, зависящий от функций $\bar{u}_k(x)$, $\bar{v}_k(x)$, $\bar{w}_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$):

$$J[u_n, v_n, w_n] = \int_0^a \Phi(\bar{u}_k, \bar{u}'_k, \bar{v}_k, \bar{v}'_k, \bar{w}_k, \bar{w}'_k, \bar{w}''_k) dx. \quad (7.40)$$

Условия минимума этого интеграла имеют вид $\delta J = \delta_u J + \delta_v J + \delta_w J = 0$, или

$$\left. \begin{aligned} \delta_u J &= \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}_k} \delta \bar{u}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}'_k} \delta \bar{u}'_k \right) dx = 0; \\ \delta_v J &= \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}_k} \delta \bar{v}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}'_k} \delta \bar{v}'_k \right) dx = 0; \\ \delta_w J &= \int_0^a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}_k} \delta \bar{w}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}'_k} \delta \bar{w}'_k + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}''_k} \delta \bar{w}''_k \right) dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

После некоторого преобразования выражений (7.41) можно получить уравнения Эйлера для функционала (7.40) систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$ и $\bar{w}_k$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}'_k} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{v}'_k} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}'_k} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}''_k} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

($k=1, 2, \dots, n$).

Уравнения (7.42) можно представить в другом виде. Поскольку

$$\begin{aligned} &\Phi(\bar{u}_k, \bar{u}'_k, \bar{v}_k, \bar{v}'_k, \bar{w}_k, \bar{w}'_k, \bar{w}''_k) = \\ &= \int_0^b F \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right) dy, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}_k} = \int_0^b \frac{\partial F}{\partial (u_n)'_y} (\varphi_k)'_y dy; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}'_k} = \int_0^b \frac{\partial F}{\partial (u_n)'_x} \varphi_k dy.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}'_k} \right) = \\ & = \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_y} (\varphi_k)'_y - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_x} \right) \varphi_k \right) dy = \\ & = - \int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_x} \right) \right) \varphi_k(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Преобразовав аналогичным образом остальные уравнения (7.42), можно записать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^b \left(\left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_x} \right)'_x + \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)'_y} \right)'_y \right) \varphi_k(y) dy = 0; \\ & \int_0^b \left(\left(\frac{\partial F}{\partial (v_n)'_y} \right)'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial (v_n)'_x} \right)'_x \right) \psi_k(y) dy = 0; \\ & \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \omega_n} - \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)'_x} \right)'_x - \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)'_y} \right)'_y + \right. \\ & \quad + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{xx}} \right)''_{xx} + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{yy}} \right)''_{yy} + \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{xy}} \right)''_{xy} \right) \chi_k(y) dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

($k = 1, 2, \dots, n$).

Формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме (7.43), аналогичной форме метода Галеркина, позволяет применять метод Власова — Канторовича к решению краевых задач для уравнений в частных производных, сводя их к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 5.4). В (7.43) внешними скобками ограничены уравнения равновесия.

В примере 7.6 метод Власова — Канторовича применяется к вариационной задаче и приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Но к решению этого уравнения можно прийти, если применить метод в форме (7.43) к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1, \quad (7.44)$$

которое является уравнением Остроградского для рассмотренного в примере функционала (7.36). В соответствии с (7.43)

$$\int_{-b}^b \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + 1 \right) (b^2 - y^2) dy = 0,$$

где $\bar{u} = (b^2 - y^2)u_1(x)$. После вычисления интеграла по переменной y получается то же, что и в примере (7.6), дифференциальное уравнение $u_1'' - (5/(2b^2))u_1 = -5/(4b^2)$.

7.5.3. Метод вариационных итераций

Для лучшего выбора аппроксимирующих функций в методе Власова — Канторовича используется метод вариационных итераций: вначале находят решение поставленной задачи методом Власова — Канторовича в виде (7.39), а из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.43) — $\bar{u}_k(x)$, $\bar{v}_k(x)$, $\bar{\omega}_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Затем эти функции используют как заданные координатные функции при аппроксимации (7.39), а искомыми считают функции $\varphi_k(y)$, $\psi_k(y)$, $\chi_k(y)$. Для их определения формируют систему обыкновенных дифференциальных уравнений (аналогично (7.43))

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \left(\left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)_x'} \right)'_x + \left(\frac{\partial F}{\partial (u_n)_y'} \right)'_y \right) \dot{u}_k(x) dx &= 0; \\ \int_0^a \left(\left(\frac{\partial F}{\partial (v_n)_y'} \right)'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial (v_n)_x'} \right)'_x \right) \bar{v}_k(x) dx &= 0; \\ \int_0^a \left(\frac{\partial F}{\partial \omega_n} - \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)_x'} \right)'_x - \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)_y'} \right)'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{xx}} \right)''_{xx} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{yy}} \right)''_{yy} + \left(\frac{\partial F}{\partial (\omega_n)''_{xy}} \right)''_{xy} \right) \bar{\omega}_k(x) dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Проведя такую процедуру два-три раза, можно получить более точное решение, не увеличивая числа членов n в разложении (7.39).

Метод вариационных итераций позволяет лучше подобрать систему аппроксимирующих функций при использовании метода Власова — Канторовича при малом числе приближений ($n=1$, $n=2$).

Пример 7.7. Найти решение задачи о кручении стержня.

Задача о кручении стержня сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения (7.44) при условии $u(x, y) = 0$ на границе области ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$).

Решение задачи будем искать методом Власова — Канторовича в первом приближении

$$u_1 = X(x)(1-y)y \quad (7.46)$$

с применением метода вариационных итераций.

Если (7.46) подставить в (7.44) и записать уравнение метода Власова — Канторовича в форме метода Галеркина (7.43)

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 1 \right) (1-y)y dy = 0,$$

для определения $X(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$0,1X'' - X = -0,5, \quad (7.47)$$

которое нужно решить при краевом условии $X(0) = X(1) = 0$.

Решение уравнения (7.47) имеет вид

$$X(x) = -0,0203e^{\sqrt{10}x} - 0,4797e^{-\sqrt{10}x} + 0,5.$$

Теперь решение уравнения (7.44) будем искать в виде

$$u_2 = Y(y) (-0,0203e^{\sqrt{10}x} - 0,4797e^{-\sqrt{10}x} + 0,5).$$

Уравнение метода Власова — Канторовича (7.45)

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 1 \right) (-0,0203e^{\sqrt{10}x} - 0,4797e^{-\sqrt{10}x} + 0,5) dx = 0$$

после вычисления интегралов по переменной x является обыкновенным дифференциальным уравнением $0,0517Y'' - 0,5317Y = 0,20945$. Решив это уравнение при граничных условиях $Y(0) = Y(1) = 0$, найдем

$$Y(y) = 0,0153e^{3,2077y} + 0,3786e^{-3,2077y} - 0,3939.$$

Таким образом, за приближенное решение уравнения (7.44) можно принять

$$u(x, y) = (0,0153e^{3,2077y} + 0,3786e^{-3,2077y} - 0,3939) (-0,0203e^{\sqrt{10}x} - 0,4797e^{-\sqrt{10}x} + 0,5).$$

8. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Метод малого параметра (метод возмущений) отличается от других численных методов своей универсальностью и является одним из наиболее распространенных методов расчета конструкций при статических и динамических воздействиях. Этим методом успешно решаются сложные нелинейные задачи строительной механики, задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, задачи на собственные значения и др. Метод малого параметра основан на представлении решения краевых или начальных задач в виде степенных рядов по степеням некоторого параметра, который может входить в условие задачи в виде некоторой физической величины (например, прогиба при решении нелинейных задач теории пластин и оболочек), но может и специально вводиться для представления решения задачи в виде степенного ряда. При удачном выборе нулевого приближения может оказаться достаточным одного-двух приближений для получения решения задачи, мало отличающегося от точного.

8.1. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

8.1.1. Представление решения задачи в виде степенных рядов

Пусть задана система дифференциальных уравнений, содержащих некоторый параметр μ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z, \mu); \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = 0; \quad z(x_0) = 0. \quad (8.2)$$

При этом f_1 и f_2 являются аналитическими функциями y , z и μ , т. е. могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням y , z и μ :

$$f_1(x, y, z, \mu) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} y^i z^j \mu^k; \quad f_2(x, y, z, \mu) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} y^i z^j \mu^k, \quad (8.3)$$

где a_{ijk} , b_{ijk} — непрерывные функции аргумента x на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащем точку x_0 .

Ряды (8.3) сходятся при значениях x на отрезке $[\alpha, \beta]$ и при радиусе сходимости ρ , удовлетворяющем неравенствам $|y| \leq \rho$, $|z| \leq \rho$, $|\mu| \leq \rho$.

Решение системы уравнений (8.1) представляют в виде степенных рядов

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \dots + \mu^n y_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n y_n(x); \\ z(x) &= \mu z_1(x) + \mu^2 z_2(x) + \dots + \mu^n z_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n z_n(x). \end{aligned} \right\} (8.4)$$

Функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ определяют так, чтобы ряды (8.4) формально удовлетворяли системе уравнений (8.1). Подстановка (8.4) в (8.1) и представление правой части (8.1) в виде (8.3) дает

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{dy_n}{dx} &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \mu^l y_l \right)^i \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu^m z_m \right)^j \mu^k; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{dz_n}{dx} &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \mu^l y_l \right)^i \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu^m z_m \right)^j \mu^k. \end{aligned} \right\} (8.5)$$

Путем сравнения коэффициентов при первой степени параметра μ в левой и правой частях (8.5) получают систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{100} y_1 + a_{010} z_1 + a_{001}; \\ \frac{dz_1}{dx} &= b_{100} y_1 + b_{010} z_1 + b_{001}. \end{aligned} \right\} (8.6)$$

Решение этой системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений найти нетрудно, если известна фундаментальная система решений соответствующей системы однородных уравнений. В этом случае решение y_1 и z_1 , удовлетворяющее условиям (8.2), т. е. в данном случае условиям $y_1(x_0) = 0$, $z_1(x_0) = 0$, находят в квадратурах.

Путем сравнения коэффициентов при μ^2 в левой и правой частях (8.5) получают систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= a_{100} y_2 + a_{010} z_2 + \underline{a_{200} y_1^2} + \underline{a_{020} z_1^2} + \underline{a_{002}} + \\ &\quad + \underline{a_{110} y_1 z_1} + \underline{a_{101} y_1} + \underline{a_{011} z_1}; \\ \frac{dz_2}{dx} &= b_{100} y_2 + b_{010} z_2 + \underline{b_{200} y_1^2} + \underline{b_{020} z_1^2} + \underline{b_{002}} + \\ &\quad + \underline{b_{110} y_1 z_1} + \underline{b_{101} y_1} + \underline{b_{011} z_1}. \end{aligned} \right\} (8.7)$$

В этих уравнениях подчеркнутые слагаемые являются уже известными функциями переменной x :

$$\begin{aligned}u_2(x) &= a_{002} + a_{200}y_1^2 + a_{020}z_1^2 + a_{110}y_1z_1 + a_{101}y_1 + a_{011}z_1; \\v_2(x) &= b_{002} + b_{200}y_1^2 + b_{020}z_1^2 + b_{110}y_1z_1 + b_{101}y_1 + b_{011}z_1.\end{aligned}$$

В итоге система уравнений во втором приближении (8.7) принимает вид, аналогичный их системе в первом приближении (8.6), и отличается от последней только свободными членами:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dy_2}{dx} &= a_{100}y_2 + a_{010}z_2 + u_2(x); \\ \frac{dz_2}{dx} &= b_{100}y_2 + b_{010}z_2 + v_2(x).\end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы уравнений $y_2(x)$, $z_2(x)$ также удовлетворяет условиям (8.2): $y_2(x_0) = 0$, $z_2(x_0) = 0$.

И, наконец, для определения функций $y_n(x)$ и $z_n(x)$ следует найти решение системы уравнений в n -м приближении

$$\left. \begin{aligned}\frac{dy_n}{dx} &= a_{100}y_n + a_{010}z_n + u_n(x); \\ \frac{dz_n}{dx} &= b_{100}y_n + b_{010}z_n + v_n(x),\end{aligned}\right\} \quad (8.8)$$

удовлетворяющее условиям $y_n(x_0) = 0$, $z_n(x_0) = 0$, где $u_n(x)$ и $v_n(x)$ — многочлены от y_1 , y_2 , ..., y_{n-1} и z_1 , z_2 , ..., z_{n-1} с коэффициентами a_{ijk} и b_{ijk} .

Если известна фундаментальная система решений соответствующей (8.8) системы однородных уравнений, то все неизвестные y_n и z_n могут быть найдены с помощью квадратур и, следовательно, получено решение исходной системы уравнений (8.1) в виде рядов (8.4).

Условием сходимости рядов (8.4) является неравенство

$$\left| \exp\left(\frac{2M(x-x_0)}{\rho}\right) \frac{\mu\rho}{(\mu+\rho)^2} \right| < \frac{1}{4},$$

где $M = \sup(|f_1|, |f_2|)$ — верхняя граница модулей функций f_1 и f_2 ; $\rho \neq 0$.

При решении нелинейных задач строительной механики компоненты перемещений и напряжений можно разложить в абсолютно сходящиеся ряды по степеням малого параметра с ненулевым радиусом сходимости в том случае, когда существуют достаточно гладкие решения соответствующих линейных уравнений. Поскольку при решении конкретных задач фактически используются отрезки бесконечных степенных рядов (8.4), в каждом случае расчета следует проводить дополнительную оценку отброшенных членов.

Метод малого параметра иногда называют методом возмущений

и применяют в основном в том случае, когда дифференциальный оператор в заданном дифференциальном уравнении можно представить в виде суммы $L = L_0 + \varepsilon S$, где L_0 — решение некоторой задачи, $\varepsilon = 0$, а возмущение εS с параметром возмущения ε мало по сравнению с L_0 . Представляя решение в виде ряда по степеням параметра ε , определяют n -е приближение при сохранении в решении всех степеней ε вплоть до ε^n . Решение исходной задачи (при $\varepsilon = 0$) называют нулевым приближением.

Пример 8.1. Найти решение нелинейного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр α ,

$$y'(1 + \alpha xy) - x = 0 \quad (8.9)$$

при начальном условии $y(0) = 0$.

Это уравнение при $\alpha \neq 0$ не интегрируется в квадратурах, а в случае $\alpha = 0$ решается просто. Представим решение уравнения (8.9) в виде ряда по степеням параметра α :

$$y = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \dots, \quad (8.10)$$

где в соответствии с заданным начальным условием

$$y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = \dots = 0. \quad (8.11)$$

Подставляя ряд (8.10) в уравнение (8.9), получим

$$(y'_0 + \alpha y'_1 + \alpha^2 y'_2 + \alpha^3 y'_3 + \dots)(1 + \alpha xy_0 + \alpha^2 xy_1 + \alpha^3 xy_2 + \dots) - x = 0.$$

Раскрывая скобки и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях α , приходим к следующей последовательности линейных дифференциальных уравнений:

$$\text{при } \alpha^0 \quad y'_0 - x = 0;$$

$$\text{при } \alpha \quad y'_1 + xy_0 y'_0 = 0;$$

$$\text{при } \alpha^2 \quad y'_2 + xy_0 y'_1 + xy_1 y'_0 = 0;$$

$$\text{при } \alpha^3 \quad y'_3 + xy_0 y'_2 + xy_1 y'_1 + xy_2 y'_0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Здесь каждое последующее уравнение отличается от предыдущего только свободными членами, именно поэтому все они являются линейными дифференциальными уравнениями и решаются в квадратурах. Ограничиваясь третьим приближением, решаем последовательно каждое уравнение с учетом условий (8.11) и находим искомые функции:

$$y_0 = \frac{x^2}{2}; \quad y_1 = -\frac{x^5}{10}; \quad y_2 = \frac{7}{160}x^8; \quad y_3 = -\frac{43}{1760}x^{11}.$$

Подставляем эти значения в ряд (8.10) и получаем решение исходного уравнения (8.9) в виде ряда

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha}{10}x^5 + \frac{7\alpha^2}{160}x^8 - \frac{43\alpha^3}{1760}x^{11} + \dots,$$

который хорошо сходится при $|x| \leq 1$.

8.1.2. Задача об осесимметричном изгибе гибкой круглой пластинки

Гибкой называется пластинка, прогибы w которой сравнимы с ее толщиной h . Задача об осесимметричном изгибе гибкой круглой пластинки сводится к решению системы двух нелинейных обыкновенных

венных дифференциальных уравнений относительно прогибов w и функции напряжений Φ . Нелинейность их обусловлена тем, что учитывается деформация срединной плоскости пластинки. В полярных координатах эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) &= -\psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr}; \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) &= -\frac{E}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Здесь введены следующие обозначения: $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластинки; $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$ —

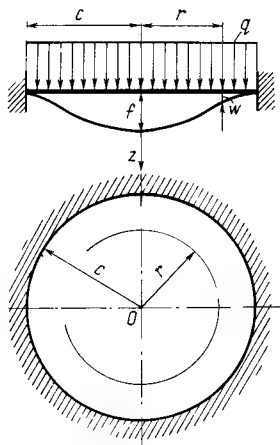


Рис. 8.1. Жестко защемленная по контуру круглая пластинка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

одномерный оператор Лапласа в полярных координатах.

Радиальные напряжения σ_r и кольцевые σ_φ выражаются через функцию напряжений Φ следующими соотношениями:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}; \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}. \quad (8.13)$$

Функция внешней нагрузки $\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr$.

В случае пластинки с малыми прогибами (не гибкой) деформация ее срединной плоскости не учитывается и задача сводится к решению одного линейного уравнения

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = \psi. \quad (8.14)$$

Система нелинейных уравнений (8.12) обычно решается методом малого параметра.

Пример 8.2. Найти уточненное с помощью метода малого параметра [20] решение нелинейной задачи об осесимметричном изгибе гибкой круглой пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 8.1). Модуль упругости материала — E , коэффициент поперечной деформации — ν .

Функция нагрузки ψ в первом уравнении (8.12) при $q = \text{const}$

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr = \frac{qr}{2}. \quad (8.15)$$

Двум обыкновенным дифференциальным уравнениям третьего порядка должны соответствовать шесть граничных условий. Однако при решении этой задачи можно поставить только пять условий, так как искомой в данном случае является не функция напряжений Φ по (8.13), а ее производная. Поэтому достаточно принять следующие граничные условия:

а) прогиб и угол поворота на контуре пластинки (при $r=c$), а также угол поворота в центре ее (при $r=0$) равны нулю, что дает три условия

$$w|_{r=c} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=c} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=0} = 0; \quad (8.16)$$

б) тангенциальное смещение u или, что то же самое, относительная деформация в окружном направлении ϵ_φ равны нулю на контуре пластинки ($r=c$):

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r) |_{r=c} = 0; \quad \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \Big|_{r=c} = 0;$$

в) поскольку напряжения σ_r ограничены по величине, следует принять в центре пластинки (при $r=0$)

$$\frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=0} = 0.$$

Исходные уравнения преобразуем, используя выражение (8.13) для Φ , а также вводя новую переменную x , безразмерные неизвестные w^* , σ_r^* и безразмерный параметр нагрузки q^* :

$$x = 1 - \frac{r^2}{c^2}; \quad w^* = \frac{w}{h}; \quad \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{E} \left(\frac{c}{h} \right)^2;$$

$$q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{c}{h} \right)^4 \frac{3}{16} (1 - \nu^2).$$

Уравнения (8.12) после преобразования примут вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \frac{dw^*}{dx} \right) &= q^* - \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sigma_r^* \frac{dw^*}{dx}; \\ \frac{d^2}{dx^2} ((1-x) \sigma_r^*) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{dw^*}{dx} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Согласно методу малого параметра, представим искомые функции w^* , σ_r^* , а также параметр нагрузки q^* в виде степенных рядов:

$$w^* = w_1^* \zeta + w_3^* \zeta^3 + \dots; \quad \sigma_r^* = \sigma_{r,2}^* \zeta^2 + \sigma_{r,4}^* \zeta^4 + \dots; \quad q^* = q_1^* \zeta + q_3^* \zeta^3 + \dots, \quad (8.18)$$

где за малый параметр принята безразмерная стрела прогиба $\zeta = f/h$.

В рядах для w^* и q^* в процессе выкладок выпадают члены с четными степенями ζ , а для σ_r^* — с нечетными.

Подстановка рядов (8.18) в уравнения (8.17) дает систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \frac{d}{dx} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} w_m^* \zeta^m \right) &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} q_m^* \zeta^m - \\ -\frac{3}{4} (1-\nu^2) \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \sigma_{r,m}^* \zeta^m \left(\frac{d}{dx} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} w_m^* \zeta^m \right); \\ \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \sigma_{r,m}^* \zeta^m \right) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} w_m^* \zeta^m \right)^2. \end{aligned} \right\}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях параметра ζ в левых и правых частях этих уравнений приводит к системе последовательных линейных дифференциальных уравнений, каждое из которых решается в квадратурах:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \zeta & -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \frac{d\omega_1^*}{dx} \right) = q_1^*; \\ \text{при } \zeta^2 & \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \sigma_{r2}^* \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_1^*}{dx} \right)^2; \\ \text{при } \zeta^3 & -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \frac{d\omega_3^*}{dx} \right) = q_3^* - \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sigma_{r2}^* \frac{d\omega_1^*}{dx} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Уравнение, определяющее решение задачи в первом приближении (первое из уравнений (8.19)), представляет собой линейное дифференциальное уравнение изгиба пластинки с малыми прогибами (8.14). Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий (8.16), найдем решение для прогиба ω_1^* , которое совпадает с известным решением линейной задачи об изгибе круглой пластинки, защемленной по контуру:

$$\omega_1^* = x^2 = (1-r^2/c^2)^2 \text{ при } q_1^* = 1. \quad (8.20)$$

Уравнение, определяющее решение во втором приближении (второе уравнение (8.19)), при известном из решения в первом приближении значении $\omega_1^* = x^2$ имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \sigma_{r2}^* \right) = -2x^2.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает

$$\sigma_{r2}^* = \frac{1}{6} \left(x^3 + x^2 + x + \frac{2}{1-\nu} \right). \quad (8.21)$$

Уравнение, определяющее решение в третьем приближении, также оказывается линейным относительно неизвестных функций:

$$-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \left((1-x) \frac{d\omega_3^*}{dx} \right) = q_3^* - \frac{3}{4} (1-\nu^2) \sigma_{r2}^* \frac{d\omega_1^*}{dx}.$$

Здесь величины ω_1^* и σ_{r2}^* определены решениями первого (8.20) и второго (8.21) приближений.

Выражение для ω_3^* определяем исходя из граничных условий: $\omega_3^* = 0$ при $x = 1$ (т. е. при $r = 0$); $\omega_3^* = d\omega_3^*/dx = 0$ при $x = 0$ ($r = c$), а также из условия, что производная $d\omega_3^*/dx$ должна быть конечной при $x = 1$:

$$\omega_3^* = \frac{1}{360} (1-\nu^2) x^2 (1-x) \left(2x^3 + 8x^2 + 23x + \frac{83-43\nu}{1-\nu} \right).$$

Ограничив уточнение решения тремя приближениями, получим соотношение между стрелой прогиба и параметром нагрузки по (8.18)

$$\frac{1+\nu}{360} (173-73\nu) \zeta^3 + \zeta = q^*.$$

Как отмечено в [20], уточненное значение прогиба ω мало отличается от полученного в первом приближении (не более чем на 5%). Однако уточненные значения напряжений отличаются от полученных в первом приближении весьма существенно.

2. Значение $\lambda_{n,1}$ вычисляют с помощью квадратур на заданном отрезке $[a, b]$:

$$\lambda_{n,1} = \int_a^b y_{n,0} \bar{M}(y_{n,0}) dx / \int_a^b y_{n,0} N^*(y_{n,0}) dx. \quad (8.28)$$

3. Решая краевую задачу, находят значение $y_{n,1}$, удовлетворяющее второму уравнению (8.27) с краевыми условиями (8.23). Эта неоднородная краевая задача имеет решение, так как соответствующая однородная задача есть задача на собственные значения вида (8.24) с известным решением. При этом функция $y_{n,1}$ определяется не однозначно, а с точностью до члена $y_{n,0}$ с постоянным коэффициентом, и этот член может быть отброшен.

4. С помощью квадратур вычисляют

$$\lambda_{n,2} = \int_a^b y_{n,0} (\bar{M}(y_{n,1}) - \lambda_{n,1} N^*(y_{n,1})) dx / \int_a^b y_{n,0} N^*(y_{n,0}) dx.$$

5. Процесс вычислений можно продолжать дальше, но обычно для получения уточненного решения достаточно трех приближений (8.26).

Пример 8.3. Определить значение критической нагрузки для стержня постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженного центрально приложенной сжимающей силой F и нагрузкой от собственного веса интенсивности q_0 (рис. 8.2).

Определение критической нагрузки для данного стержня сводится к задаче на собственные значения для дифференциального уравнения

$$y'' - \frac{q_0}{EI} xy = - \frac{F}{EI} y.$$

Полагая $\lambda = F/(EI)$ и принимая за малый параметр величину $\varepsilon = q_0/(EI)$, где EI — жесткость стержня при изгибе, приходим к уравнению

$$y'' - \varepsilon xy = -\lambda y \quad (8.29)$$

с условиями на концах стержня $y(0) = y(l) = 0$.

Уравнение (8.29) соответствует (8.25), где $M^*(y) = y''$, $\bar{M}(y) = -xy$ и $N^*(y) = -y$. При $\varepsilon = 0$ из (8.29) получаем дифференциальное уравнение известной задачи об устойчивости центрально сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами.

Следовательно, к уравнению (8.29) можно применить метод малого параметра. Представим собственные функции и собственные значения в задаче с уравнением (8.29) в виде рядов (8.26) по степеням ε . Подставляя эти ряды в уравнение (8.29) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \varepsilon^0 \quad & y''_{n,0} = -\lambda_{n,0} y_{n,0}; \\ \text{при } \varepsilon \quad & y''_{n,1} = -\lambda_{n,0} y_{n,1} - \lambda_{n,1} y_{n,0} + x y_{n,0}; \\ \text{при } \varepsilon^2 \quad & y''_{n,2} = -\lambda_{n,0} y_{n,2} - \lambda_{n,1} y_{n,1} - \lambda_{n,2} y_{n,0} + x y_{n,1} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

Первое уравнение из (8.30) имеет решение при условиях на концах стержня $y_{n,0}(0) = y_{n,0}(l) = 0$, известное как решение задачи Эйлера об устойчивости центрально сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами. Собственные функции этого уравнения $y_{n,0} = \sin(n\pi x/l)$ и собственные значения $\lambda_{n,0} = n^2 \pi^2 / l^2$.

В соответствии с изложенным выше вычислительным процессом находим значения $\lambda_{n,1}$ с помощью квадратур (8.28), подставляя в них соответствующие операторы

$$\bar{M}(y_{n,0}) = -xy_{n,0}, \quad N^*(y_{n,0}) = -y_{n,0};$$

$$\lambda_{n,1} = \frac{\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \left(-\sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx} = \frac{\int_0^l x \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx}{-\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx} = -\frac{l}{2}.$$

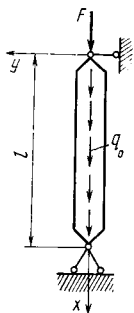


Рис. 8.2. Стержень, центрально сжатый под действием силы F и собственного веса

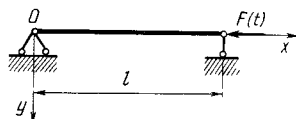


Рис. 8.3. Стержень, нагруженный осевой сжимающей периодически изменяющейся силой $F(t)$

Прекратив на этом вычисления, получаем в соответствии с (8.26) собственные значения во втором приближении $\lambda_n = n^2\pi^2/l^2 - \varepsilon l/2$. Подставив сюда значения $\lambda_n = F/(EI)$ и $\varepsilon = q_0/(EI)$, а также приняв $n=1$, найдем критическую нагрузку

$$F_{cr} = \pi^2 EI/l^2 - 0,5q_0 l. \quad (8.31)$$

Для нахождения третьего приближения следует решить в соответствии с п. 3 вычислительного процесса краевую задачу и найти значение $y_{n,1}$, удовлетворяющее второму уравнению (8.30). Затем с помощью соответствующих квадратур определить значение $\lambda_{n,2}$. Однако вычисления [42] показали, что третье приближение дает поправку ко второму не более 1%, и результат (8.31) следует считать достаточно точным.

8.2.2. Задача о динамической устойчивости сжатого стержня

Применение метода малого параметра к решению задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами типа

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0, \quad (8.32)$$

позволяет решать ряд сложных задач строительной механики. Одной из них является задача о поперечных колебаниях шарнирно закрепленного на концах стержня под действием продольной периодической силы [6, 7].

Рассматривается стержень (рис. 8.3) длиной l (площадь поперечного сечения — A , жесткость при изгибе — $EI = \text{const}$, плотность

материала $-\rho$), на который действует осевая периодическая сжимающая сила

$$F(t) = F_0 \cos vt, \quad (8.33)$$

где v — частота возмущающей силы; t — время.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний этого стержня имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (8.34)$$

а граничные условия на шарнирно закрепленных концах стержня

$$y \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0.$$

Решение уравнения (8.34), удовлетворяющее этим граничным условиям: $y = f(t) \sin(\pi x/l)$. Подстановка этого решения в (8.34) с учетом (8.33) дает уравнение

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos vt) f = 0, \quad (8.35)$$

которое является частным случаем дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами (8.32) и называется уравнением Матье.

Здесь введены обозначения для квадрата круговой частоты собственных колебаний стержня $\omega^2 = \pi^2 EI / (\rho A l^4)$ и для коэффициента возбуждения $h = F_0 l^2 / (\pi^2 EI) \ll 1$.

Уравнение Матье (8.35) обладает особым свойством, которое заключается в том, что при некоторых соотношениях параметров ω , v и h значения его решений неограниченно возрастают и на плоскости этих параметров непрерывно заполняют так называемые области динамической неустойчивости — области параметрического резонанса.

Параметрическому резонансу, при котором выдерживается соотношение частот собственных колебаний стержня и возмущающей силы $\omega = v/s$ при $s = 1, 2, 3, \dots$, соответствует решение уравнения (8.35) $f(t)$ с периодом $4\pi/v$. Каждому значению s соответствует своя область динамической неустойчивости колебательной системы (в данном случае — стержня). Наибольший интерес представляет область *главного параметрического резонанса*, который имеет место при $s = 2$ (т. е. при $\omega = v/2$). Границы области определяются из решения уравнения Матье (8.35) методом малого параметра.

Пример 8.4. Определить с помощью метода малого параметра границы области главного параметрического резонанса для стержня, изображенного на рис. 8.3 [6].

Полагая параметр h малым по сравнению с единицей, ищем периодическое решение уравнения (8.35) в виде ряда по степеням этого параметра

$$f(t) = f_0 + h f_1 + h^2 f_2 + \dots, \quad (8.36)$$

в котором $f_0, f_1, f_2, \dots$ — периодические функции с периодом $4\pi/\nu$.

Квадрат частоты собственных колебаний стержня также представим в виде степенного ряда

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{4} + h\omega_1 + h^2\omega_2 + \dots \quad (8.37)$$

Подставляя ряды (8.36), (8.37) в уравнение (8.35) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях h , получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_0}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} f_0 &= 0; \\ \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} f_1 &= \left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega \right) f_0; \\ \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} f_2 &= \left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega_1 \right) f_1 + (\omega_1 \cos \nu t - \omega_2) f_0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

из которой последовательным решением каждого уравнения определяем нулевое и последующие приближения решения поставленной задачи, т. е. $f_0, f_1, f_2, \dots$ и $\omega_1, \omega_2, \dots$

Первое уравнение этой системы (уравнение для нулевого приближения), которое представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решается обычным способом. Его характеристическое уравнение имеет мнимые корни, поэтому общее решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$f_0(t) = a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right), \quad (8.39)$$

где a_0, ϑ_0 — произвольные постоянные (амплитуда колебаний и фазовый угол).

Подставляя это выражение в правую часть второго уравнения из (8.38), получаем уравнение для первого приближения

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} f_1 = -\omega_1 a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) + \frac{\nu^2}{4} a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) \cos \nu t,$$

или после преобразования его правой части с помощью тригонометрических тождеств

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} f_1 &= -\left(\omega_1 - \frac{\nu^2}{8}\right) a_0 \cos \frac{\nu}{2} t \cdot \cos \vartheta_0 + \\ &+ \left(\omega_1 + \frac{\nu^2}{8}\right) a_0 \sin \frac{\nu}{2} t \cdot \sin \vartheta_0 + \frac{\nu^2}{8} a_0 \cos\left(\frac{3\nu}{2}t + \vartheta_0\right). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Для того чтобы решение $f_1(t)$ этого уравнения было периодической функцией с периодом $4\pi/\nu$, необходимо приравнять члены в его правой части, соответствующие резонансу системы, а следовательно, и коэффициенты при $\cos(\nu t/2)$ и $\sin(\nu t/2)$ нулю. Исходя из этого условия, получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \nu^2/8, \quad \cos \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \pi, 2 \\ \text{или} \quad \omega_1 &= -\nu^2/8, \quad \sin \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

которые с учетом ряда (8.37) дают первое приближение искомого решения, т. е. соотношения между ω, ν и h , соответствующие главному параметрическому резонансу ($\omega = \nu/2$): $\omega^2 = \nu^2/4 + h\nu^2/8$ или $\omega^2 = \nu^2/4 - h\nu^2/8$.

Отсюда получаем границы главной области динамической неустойчивости заданного стержня на плоскости параметров в координатах $4\omega^2/\nu^2, h$ в первом приближении, т. е. уравнения двух прямых, ограничивающих эту область:

$$4\omega^2/\nu^2 = 1 + h/2; \quad 4\omega^2/\nu^2 = 1 - h/2. \quad (8.42)$$

Второе приближение находим решением неоднородного дифференциального уравнения (8.40), которое при учете условий периодичности решений (8.41) принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{f}_1}{dt^2} + \frac{v^2}{4} \tilde{f}_1 = \frac{v^2}{8} a_0 \cos \frac{3v}{2} t.$$

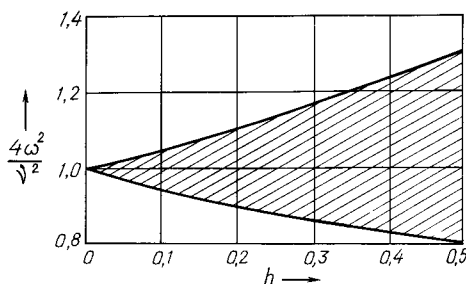


Рис. 8.4. Главная область (заштрихована) динамической неустойчивости стержня, показанного на рис. 8.3

Все решения этого уравнения состоят из суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного, т. е.

$$\tilde{f}_1(t) = -\frac{a_0}{16} \cos \frac{3v}{2} t + b \cos \left(\frac{v}{2} t + \varphi \right).$$

Подставляя это выражение для $\tilde{f}_1(t)$, а также $\tilde{f}_0(t)$ по (8.39) в третье уравнение (8.38), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{f}_2}{dt^2} + \frac{v^2}{4} \tilde{f}_2 = & - \left(\frac{v^2}{4} \cos vt - \omega_1 \right) \frac{a_0}{16} \cos \frac{3v}{2} t + \\ & + \left(\frac{v^2}{4} \cos vt - \omega_1 \right) b \cos \left(\frac{v}{2} t + \varphi \right) + (\omega_1 \cos vt - \omega_2) a_0 \cos \frac{v}{2} t. \end{aligned}$$

Преобразовав правую часть этого уравнения с помощью тригонометрических тождеств и выполнив условия периодичности решений с периодом $4\pi/v$, приравняем коэффициенты при $\cos(vt/2)$ и $\sin(vt/2)$ нулю и получим: $\omega_2 = 7v^2/128$, $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$ или $\omega_2 = 7v^2/128$, $\cos \varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$. Эти соотношения с учетом (8.37) дают второе приближение искомого решения для квадрата частоты собственных колебаний стержня, соответствующей главному параметрическому резонансу:

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} \pm h \frac{v^2}{8} + h^2 \frac{7v^2}{128}.$$

На этом процесс уточнения решения прекращаем, так как это уточнение во втором приближении уже оказалось малым. Границы главной области динамической неустойчивости стержня на плоскости параметров $4\omega^2/v^2$ и h (рис. 8.4) с учетом второго приближения решения методом малого параметра определяются уравнениями $4\omega^2/v^2 = 1 \pm h/2 \pm 7h^2/32$. Эти границы в отличие от (8.42) имеют нелинейный характер, однако поправка второго приближения, содержащая h^2 , мала и сказывается существенно лишь при значениях h , близких к 0.5.

9. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Интегральные уравнения относятся к одному из видов функциональных уравнений, в которых неизвестная функция содержится под знаком определенного интеграла. К этим уравнениям сводятся в основном нестационарные задачи строительной механики, в которых неизвестными являются функции времени, а также другие задачи, связанные с предпочтительным направлением изменения независимого переменного. К такого рода проблемам относятся, например, задачи определения вязкоупругих деформаций. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма играют важную роль в исследовании напряженно-деформированного состояния тел, материал которых обладает свойством ползучести. Кроме того, решение краевой задачи для дифференциального уравнения в необходимых случаях можно свести к решению интегрального уравнения.

9.1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1.1. Интегральные уравнения Фредгольма

Интегральным уравнением Фредгольма первого рода называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (9.1)$$

где ядро уравнения $K(x, y)$ и свободный член $f(x)$ — заданные действительные функции переменных x и y в квадратной области $a \leq x, y \leq b$ (рис. 9.1). Интеграл

$$K[\varphi] = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

называется *интегральным оператором*.

Уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (9.2)$$

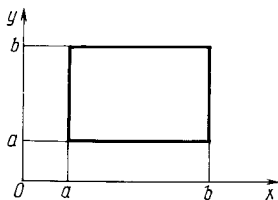
где λ — действительный параметр (число), называется *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Если в (9.2) свободный

член $f(x) \equiv 0$, получается однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy, \quad (9.3)$$

допускающее тривиальное решение $y \equiv 0$. Те значения параметра λ , при которых однородное интегральное уравнение (9.3) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями (собственными числами) ядра $K(x, y)$ или соответствующего уравнения (9.2), а отвечающие им ненулевые решения — собственными функциями.

Рис. 9.1. Область задания ядра уравнения Фредгольма



Поскольку в задачах строительной механики используется в основном интегральное уравнение Фредгольма второго рода (9.2), в дальнейшем будем его для краткости называть уравнением Фредгольма. Решением уравнения (9.2) считают функцию $\varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество по x . Следует отметить, что (9.2) представляет собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящих от числового параметра λ . Пределы интегрирования a и b в (9.2) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Уравнение Фредгольма с симметричным ядром $K(x, y) = K(y, x)$ называется симметричным и обладает некоторыми особыми свойствами: 1) для любого симметричного ядра существует по меньшей мере одно собственное значение; 2) все собственные значения симметричного ядра действительны; 3) собственные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ симметричного ядра, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в промежутке (a, b) , т. е. их скалярные произведения равны нулю:

$$(\varphi, \psi) \equiv \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0. \quad (9.4)$$

Пример 9.1. Показать, что уравнение малых колебаний упругой нити сводится к интегральному уравнению Фредгольма [61].

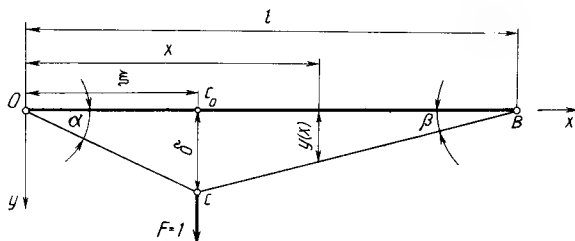


Рис. 9.2. Упругая растянутая нить

Упругая нить длиной l натянута между точками O и B вдоль оси x (рис. 9.2) силой натяжения T . Пусть под действием единичной силы $F=1$, приложенной в точке C с координатой ξ , эта точка получила малое вертикальное смещение δ . Ввиду

малости δ считаем, что сила натяжения нити T остается неизменной. Рассматривая узел c и проецируя силы на ось y , получим уравнение равновесия нити

$$T \sin \alpha + T \sin \beta = 1,$$

где $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \delta / \xi$; $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \delta / (l - \xi)$; $\delta = \xi(l - \xi) / (lT)$.

Отсюда смещение $y(x)$ любой точки нити с координатой x при действии единичной силы будет $y(x) = K(x, \xi)$, где функция $K(x, \xi)$, называемая функцией влияния (функцией Грина), принимает значения

$$\left. \begin{aligned} K(x, \xi) &= \frac{x(l - \xi)}{lT} \quad \text{при } 0 \leq x \leq \xi; \\ K(x, \xi) &= \frac{\xi(l - x)}{lT} \quad \text{при } \xi \leq x \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Эта функция обладает свойством симметрии: $K(x, \xi) = K(\xi, x)$.

Если на нить действует распределенная нагрузка интенсивности $q(\xi)$, то на малом ее участке действует сила $q(\xi) \cdot \Delta \xi$ и смещение любой точки x нити определяется произведением функции влияния (9.5) на эту силу: $K(x, \xi) q(\xi) \Delta \xi$.

Под действием же всей нагрузки, приложенной к нити, смещение ее любой точки выразится интегралом

$$y(x) = \int_0^l K(x, \xi) q(\xi) d\xi, \quad (9.6)$$

представляющим собой уравнение равновесия нити.

Для того чтобы из (9.6) получить уравнение движения весомой нити, примем, что $y(x, t)$ — смещение нити в точке x в момент времени t . Ускорение этой точки будет $\partial^2 y(x, t) / \partial t^2$.

Обозначив через ρ линейную плотность нити, найдем массу ее элемента $\rho d\xi$. Следуя принципу Д'Аламбера, заменим в уравнении равновесия (9.6) $q(\xi) d\xi$ на $-\rho d\xi \partial^2 y(\xi, t) / \partial t^2$ и получим уравнение движения

$$y(x, t) = - \int_0^l K(x, \xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} \rho d\xi.$$

Если колебания гармонические, т. е. $y(x, t) = y(x) \sin \omega t$, то, подставив это выражение в уравнение движения и поделив его правую и левую части на $\sin \omega t$, получим уравнение свободных колебаний упругой нити

$$y(x) = \rho \omega^2 \int_0^l K(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

которое представляет собой однородное уравнение Фредгольма второго рода вида (9.3). Его ядро $K(x, \xi)$ симметричное, поэтому уравнение является симметричным. Оно позволяет определить собственные значения ω (частоты свободных колебаний нити), а также собственные функции $y(x)$ (формы свободных колебаний нити).

В случае действия на нить периодической распределенной нагрузки, например $q(\xi) \sin \omega t$, приходим к неоднородному уравнению Фредгольма вида (9.2), описывающему вынужденные колебания нити:

$$y(x) - \rho \omega^2 \int_0^l K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x),$$

где $f(x)$ — заданная функция нагрузки, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

9.1.2. Интегральные уравнения Вольтерра

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (9.7)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (9.8)$$

называются *интегральными уравнениями Вольтерра* первого и второго рода. Формально эти уравнения отличаются от уравнений Фредгольма (9.1), (9.2) только переменным верхним пределом интегрирования, поэтому все положения, справедливые для уравнений Фредгольма, относятся и к уравнениям Вольтерра. Однако уравнения Вольтерра имеют и некоторые особенности.

Так, область определения ядра уравнений Вольтерра не квадратная, как уравнений Фредгольма, а треугольная (рис. 9.3), т. е. $a \leq x, y \leq b$ при $x \leq y$. Если $x > y$, ядро $K(x, y) \equiv 0$.

В отличие от уравнений Фредгольма уравнение Вольтерра (9.8) не имеет собственных значений: однородное уравнение, соответствующее (9.8), при любом λ имеет только тривиальное решение [61].

Уравнение Вольтерра первого рода (9.7) при условии, что ядро его $K(x, y) \neq 0$, приводится к уравнению второго рода (9.8). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только интегральные уравнения Вольтерра второго рода (9.8) и для краткости именовать их уравнениями Вольтерра.

Примером интегрального уравнения Вольтерра в теории ползучести может служить уравнение Больцмана — Вольтерра линейной теории наследственности, которое определяет полную деформацию нагруженного тела, т. е. его мгновенную деформацию и деформацию ползучести. В случае осевого растяжения стержня (модуль упругости материала — E) это уравнение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

т. е. вид интегрального уравнения Вольтерра типа свертки относительно напряжения $\sigma(t)$. Здесь полная деформация $\varepsilon(t)$ определяется в зависимости не только от напряжения, действующего в данный момент времени t ,

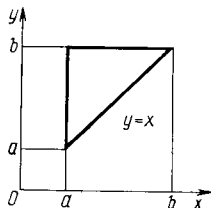


Рис. 9.3. Область задания ядра уравнения Вольтерра

а от всех напряжений $\sigma(\tau)$, которые действовали в стержне от начала нагружения ($\tau=0$) до момента времени $\tau=t$. Ядро этого уравнения называется ядром последействия.

9.1.3. Связь между линейным дифференциальным уравнением и уравнением Вольтерра

Любое линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с начальными условиями можно привести к уравнению Вольтерра.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \quad (9.9)$$

при начальных условиях

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \quad (9.10)$$

Это уравнение довольно просто приводится к уравнению Вольтерра. Для этого надо принять

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (9.11)$$

и использовать формулу

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz,$$

которая с учетом начальных условий дает:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1; \quad y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0. \quad (9.12)$$

На основании (9.11), (9.12) дифференциальное уравнение (9.9) с учетом (9.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \varphi(t) dt + \\ + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x (a_1(x) + a_2(x) (x-t)) \varphi(t) dt = \\ = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \end{aligned}$$

В результате получено неоднородное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt + f(x),$$

где ядро уравнения $K(x, t) = -(a_1(x) + a_2(x) (x-t))$, а свободный член $f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$.

Аналогичный результат получается для линейного дифференциального уравнения порядка n .

Возможно обратное преобразование, т. е. если ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ есть целый полином относительно t степени n

$$K(x, t) = \sum_{m=0}^n a_m(x) t^m,$$

путем последовательного дифференцирования уравнение Вольтерра приводят к задаче Коши для некоторого линейного дифференциального уравнения. Этот переход является одним из приемов решения интегральных уравнений.

Пример 9.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) + \int_0^x (2+x-t)y(t) dt = x^2. \quad (9.13)$$

Последовательно продифференцируем его два раза по x :

$$y'(x) + 2y(x) + \int_0^x y(t) dt = 2x; \quad (9.14)$$

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2. \quad (9.15)$$

Из уравнения (9.13) получаем начальное условие $y(0) = 0$, а из (9.14) — условие $y'(0) = 0$.

Решая при этих начальных условиях линейное дифференциальное уравнение второго порядка (9.15), имеем соотношение

$$y(x) = 2 - 2e^{-x}(1+x),$$

которое является также решением уравнения Вольтерра (9.13).

9.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.2.1. Решение с помощью резольвенты

Приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (9.16)$$

можно искать в виде бесконечного ряда по степеням λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots \quad (9.17)$$

Подстановка этого ряда в (9.16) дает

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots = \\ & = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) (\varphi_0(t) + \lambda \varphi_1(t) + \dots + \lambda^n \varphi_n(t) + \dots) dt, \end{aligned}$$

откуда при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях λ получают равенства:

$$\varphi_0(x) = f(x);$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t) dt = \int_0^x K(x, t) f(t) dt;$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi_1(t) dt = \int_0^x K(x, t) \left(\int_0^t K(t, t_1) f(t_1) dt_1 \right) dt \text{ и т. д.}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\varphi_2(x) = \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^x K(x, t) K(t, t_1) dt = \int_0^x K_2(x, t_1) f(t_1) dt_1,$$

где $K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x K(x, t) K(t, t_1) dt$.

Аналогично

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x, t) f(t) dt \quad (n=1, 2, \dots). \quad (9.18)$$

Функции $K_n(x, t)$ называются повторными или *итерированными ядрами*. Их определяют с помощью рекуррентных формул

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, t) &= K(x, t); \\ K_{n+1}(x, t) &= \int_t^x K(x, z) K_n(z, t) dz \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Разложение в ряд (9.17) с учетом (9.18), (9.19):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_0^x K_m(x, t) f(t) dt; \\ R(x, t; \lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

где функция $R(x, t; \lambda)$ называется *резольвентой* или разрешающим ядром интегрального уравнения (9.16). С помощью резольвенты решение заданного уравнения Вольтерра записывается в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt. \quad (9.21)$$

Аналогично решаются интегральные уравнения Фредгольма.

Пример 9.3. Найти резольвенту уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = 1$.

Согласно формулам (9.19):

$$K_1(x, t) = K(x, t) = 1;$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, t) K_1(z, t) dz = \int_t^x dz = x - t;$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x 1 \cdot (z - t) dz = \frac{(x - t)^2}{2};$$

$$K_4(x, t) = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z - t)^2}{2} dz = \frac{(x - t)^3}{3!} \text{ и т. д.}$$

Резольвенту находим по формуле (9.20):

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x - t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Решение соответствующего интегрального уравнения определится по (9.21).

9.2.2. Метод последовательных приближений

Решение интегрального уравнения Вольтерра (9.8) можно получить методом последовательных приближений (методом итераций). Для этой цели некоторую непрерывную функцию $\varphi_0(x)$ подставляют в правую часть (9.8) вместо $\varphi(x)$:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy.$$

Этот процесс продолжают и в результате получают последовательность функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., сходящуюся к решению $\varphi(x)$. Каждая функция $\varphi_n(x)$ определяется по рекуррентной формуле

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy. \quad (9.22)$$

Пример 9.4. Решить методом последовательных приближений уравнение Вольтерра $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt$.

Принимаем $\varphi_0(x) = 0$ и находим по (9.22):

$$\varphi_1(x) = 1;$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x;$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!};$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, φ_n есть n -я частичная сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, следовательно, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$. Функция $\varphi(x) = e^x$ есть решение заданного интегрального уравнения.

9.2.3. Решение интегральных уравнений методом Бубнова — Галеркина

Для решения уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (9.23)$$

методом Бубнова — Галеркина выбирают последовательность линейно независимых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ и находят приближенное решение в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x).$$

Вид функций $u_i(x)$ зависит от конкретной задачи, а коэффициенты a_k определяются так, чтобы невязка уравнения (9.23) при таком решении была ортогональна к функциям $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$. Это дает линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b (u_k(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_k(s) ds) u_i(x) dx = \\ = \int_a^b f(x) u_i(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Если λ не является собственным числом, эта система имеет единственное решение, которое при $n \rightarrow \infty$ стремится к точному решению $\varphi(x)$.

9.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

9.3.1. Основные понятия

Интегральным преобразованием функции $f(t)$ называется операция

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt, \quad (9.24)$$

где $K(s, t)$, s — ядро и параметр преобразования.

Переменная t является вещественной, а параметр преобразования может быть как вещественным, так и комплексным.

Пределы интегрирования в (9.24) могут быть конечными либо бесконечными. Функцию $F(s)$ называют *изображением функции* $f(t)$, а функцию $f(t)$ — *оригиналом*. Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(s)$, осуществляемый по (9.24), и есть интегральное преобразование.

На интегральном преобразовании основан операционный метод решения дифференциальных и интегральных уравнений. Соответствие изображения $F(s)$ и оригинала $f(t)$ строго однозначно для большинства практических задач. Интегральные преобразования характерны тем, что многим операциям над оригиналами соответствуют более простые операции над их изображениями.

Основанные на интегральных преобразованиях методы решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных являются весьма эффективными. Последовательным применением нескольких интегральных преобразований можно свести многомерную исходную задачу к решению обыкновенных дифференциальных или даже алгебраических уравнений.

9.3.2. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа связывает однозначную функцию-изображение $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$ с функцией-оригиналом $f(t)$ действительной переменной t .

Функция

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (9.25)$$

называется преобразованием Лапласа функции $f(t)$, которое ставит в соответствие каждой однозначной функции-оригиналу $f(t)$ со сходящимся несобственным интегралом единственную функцию-изображение $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$.

Функция-оригинал должна удовлетворять условиям $f(t) = 0$ при $t < 0$ и $f(t) \neq 0$ при $t \geq 0$, а также возрастать не быстрее показательной функции, т. е. для всех t $|f(t)| \leq M e^{at}$, $M > 0$, $a \geq 0$.

То, что $F(s)$ есть изображение оригинала $f(t)$, символически записывается так: $f(t) \doteq F(s)$.

Основные свойства преобразования Лапласа:

1) свойство линейности: для любых комплексных постоянных α и β , если $f(t) \doteq F(s)$ и $g(t) \doteq G(s)$,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(s) + \beta G(s); \quad (9.26)$$

2) свойство подобия: для любого числа $a > 0$

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right); \quad (9.27)$$

3) дифференцирование оригинала: если $f(t) \rightleftharpoons F(s)$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}'(t) &\doteq sF(s) - f(0); \\ \ddot{f}''(t) &\doteq s^2F(s) - sf'(0) - f''(0); \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}_{(t)} &\doteq s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0); \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

4) дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала:

$$F'(s) = -tf(t), \text{ или } F^{(n)}(s) = (-1)^n t^n f(t); \quad (9.29)$$

5) интегрирование оригинала сводится к делению изображения на s , т. е. если $f(t) \equiv F(s)$,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(s)}{s}; \quad (9.30)$$

6) интегрирование изображения сводится к делению оригинала на t :

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^\infty F(s) ds; \quad (9.31)$$

7) сдвиг изображения: если $f(t) \doteq F(s)$, для любого s_0

$$e^{s_0 t} f(t) \doteq F(s - s_0); \quad (9.32)$$

8) запаздывание оригинала: если $f(t) \equiv F(s)$, для любого $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \doteq e^{-s\tau} F(s); \quad (9.33)$$

9) теорема о свертке: произведение двух изображений также является изображением, т. е. если $f(t) \doteq F(s)$ и $\varphi(t) \doteq \Phi(s)$,

$$F(s)\Phi(s) \doteq \int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (9.34)$$

Интеграл в правой части этого равенства называется *сверткой* функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t)*\varphi(t)$. Умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

Обратное преобразование осуществляют с помощью формулы обращения Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

В табл. 9.1 приведены некоторые наиболее часто встречающиеся преобразования Лапласа, т. е. оригиналы $f(t)$ и соответствующие им изображения. Более подробные таблицы преобразований Лапласа приведены, например, в справочнике [44].

Табл. 9.1. Преобразования Лапласа ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $t > 0$)

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{a^3} (at - \sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{t}{2a} \sin at$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a} \sin at$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{b} e^{at} \sin bt$	$\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$
$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

Пример 9.5. Пользуясь определением (9.25), найти изображение функции $f(t) = e^{2t}$.
Из (9.25) находим

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t} dt = \frac{1}{-(s-2)} e^{-(s-2)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-2}.$$

Пример 9.6. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{\tau} d\tau$.

Исходя из предыдущего примера (или из табл. 9.1), имеем $e^t \equiv 1/(s-1)$. По правилу интегрирования оригинала (9.30)

$$\int_0^t e^{\tau} d\tau \equiv \frac{1/(s-1)}{s} = \frac{1}{s(s-1)}.$$

9.3.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \quad (9.35)$$

где a_0, a_1, a_2 — константы; $a_0 \neq 0$.

Решение уравнения (9.35), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad (9.36)$$

операционным методом заключается в следующем.

Если применить к обеим частям уравнения (9.35) преобразования Лапласа $x(t) \doteq X(s)$, $f(t) \doteq F(s)$ и использовать правило дифференцирования оригинала (9.28), а также свойство линейности преобразования (9.26), из дифференциального уравнения (9.35) с начальными условиями (9.36) получится алгебраическое уравнение

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) X(s) - (a_0 s x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(s),$$

откуда определяется изображение

$$X(s) = (F(s) + a_0 s x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) / (a_0 s^2 + a_1 s + a_2).$$

Из полученного решения начальной задачи (9.35), (9.36) для изображения $X(s)$ определяют оригинал $x(t)$, т. е. искомое решение данной начальной задачи. Аналогично решают дифференциальные уравнения n -го порядка или системы дифференциальных уравнений.

Пример 9.7. Решить операционным методом начальную задачу для дифференциального уравнения

$$x'' + x = 2 \cos t \quad (9.37)$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$. Полагаем

$$x(t) \doteq X(s) \quad (9.38)$$

и, применив правило дифференцирования оригинала (9.28) и свойство линейности преобразования Лапласа (9.26), получим с учетом начальных условий:

$$x'(t) \doteq sX(s) - x(0) = sX(s);$$

$$x''(t) \doteq s^2 X(s) - s x(0) - x'(0) = s^2 X(s) + 1.$$

Из табл. 9.1 $\cos t \doteq s/(s^2 + 1)$. Подставляя полученные значения производных и $\cos t$ в уравнение (9.37), приходим к алгебраическому уравнению относительно изображения $X(s)$

$$s^2 X(s) + 1 + X(s) = 2s/(s^2 + 1),$$

откуда $X(s) = 2s/(s^2 + 1)^2 - 1/(s^2 + 1)$.

С помощью данных табл. 9.1 переходим от изображения $X(s)$ к оригиналу. Оригинал второго слагаемого правой части $1/(s^2 + 1) = \sin t$. Для нахождения оригинала первого слагаемого воспользуемся правилом дифференцирования изображения (9.29):

$$\frac{2s}{(s^2 + 1)^2} = - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \doteq t \sin t.$$

В итоге получим преобразование Лапласа в соответствии с (9.38)

$$X(s) \doteq t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t.$$

Следовательно, решение поставленной начальной задачи $x(t) = (t - 1) \sin t$.

Пример 9.8. Решить операционным методом задачу о малых свободных колебаниях натянутой струны длиной l , жестко закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$. Начальное отклонение струны $u(x, 0) = A \sin(\pi x/l)$, $0 \leq x \leq l$, начальная скорость равна нулю. Требуется найти отклонение струны $u(x, t)$ в любой момент времени $t > 0$.

Свободные колебания струны с натяжением T и плотностью материала ρ описываются дифференциальным уравнением в частных производных (волновым уравнением)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.39)$$

где $u(x, t)$ — смещение точек струны; $a = \sqrt{T/\rho}$.

Исходя из условий задачи, определим начальные и краевые условия для уравнения (9.39): при $t=0$ смещение точек струны задано, а скорость равна нулю, т. е.

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (9.40)$$

на концах струны смещения равны нулю, т. е. при $x=0$ и $x=l$ $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Применяя операционный метод решения задачи, предположим, что $u(x, t)$ и $\partial^2 u(x, t) / \partial x^2$, рассматриваемые как функции t , являются оригиналами. Обозначим через

$$U(s, x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$$

изображение функции $u(x, t)$. Тогда преобразования Лапласа для производных от $u(x, t)$ будут

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{dU}{dx}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad (9.41)$$

откуда с учетом начальных условий (9.40)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s^2 U - sA \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9.42)$$

Подставляя (9.41), (9.42) в исходное уравнение (9.39), получим уравнение в изображениях

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} U = -\frac{sA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (9.43)$$

при условиях

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \quad (9.44)$$

Таким образом, применение операционного метода позволило от сложного дифференциального уравнения в частных производных (9.39) перейти к более простому обыкновенному дифференциальному уравнению (9.43), решение которого легко определяется:

$$U(x, s) = C_1 e^{sx/a} + C_2 e^{-sx/a} + \frac{As}{s^2 + a^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

С учетом краевых условий (9.44) $C_1 = C_2 = 0$, и решение в изображениях имеет вид

$$U(x, s) = \frac{As}{s^2 + a^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Переходя от изображения $U(x, s)$ к оригиналу, находим искомое отклонение струны $u(x, t) = A \cos(\pi a t / l) \sin(\pi x / l)$.

9.3.4. Решение интегральных уравнений операционным методом

Интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt = f(x)$$

с ядром $K(x-t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра, называемых

уравнениями типа свертки. Именно уравнения такого типа используются в линейной наследственной теории ползучести.

Рассмотрим уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt, \quad (9.45)$$

причем имеют место преобразования Лапласа: $\Phi(s) \equiv \varphi(x)$, $F(s) \equiv f(x)$, $L(s) \equiv K(x)$.

Если к обеим частям уравнения (9.45) применить преобразования Лапласа и использовать теорему о свертке (9.34), а именно

$$L(s)\Phi(s) \equiv \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt,$$

из (9.45) можно получить уравнение в изображениях

$$\Phi(s) = F(s) + \lambda L(s)\Phi(s),$$

откуда $\Phi(s) = F(s)/(1 - \lambda L(s))$, $\lambda L(s) \neq 1$.

Для окончательного решения интегрального уравнения (9.45) остается по изображению искомой функции $\Phi(s)$ найти оригинал $\varphi(x)$.

Пример 9.9. Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + x. \quad (9.46)$$

Используя преобразования Лапласа (табл. 9.1) $\varphi(x) \equiv \Phi(s)$, $\psi(x) = x \equiv 1/s^2$, $f(x) = x \equiv 1/s^2$, запишем в изображениях уравнение, соответствующее (9.46):

$$\Phi(s) = (1/s^2)\Phi(s) + 1/s^2,$$

отсюда

$$\Phi(s) = \frac{1/s^2}{1 - 1/s^2} = \frac{1}{s^2 - 1} \equiv \text{sh } x.$$

Следовательно, решение заданного уравнения Вольтерра будет иметь вид $\varphi(x) = \text{sh } x$.

9.3.5. Преобразование Лапласа — Карсона и его применение в задачах теории вязкоупругости

Преобразованием Лапласа — Карсона функции $f(t)$ называется функция

$$f^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \quad (9.47)$$

которая отличается от преобразования Лапласа (9.25) множителем p перед интегралом, где p — аргумент функции-изображения $f^*(p)$.

Преобразование (9.47) обладает всеми свойствами преобразования Лапласа (см. § 9.3.2) и имеет некоторые дополнительные

свойства. Например, изображение постоянной величины в преобразовании Лапласа — Карсона остается без изменения. В табл. 9.2 приведены некоторые оригиналы и соответствующие им изображения по Лапласу — Карсону.

Наиболее часто применяемая в расчетах теорема о свертке (9.34) в преобразовании Лапласа — Карсона выражается через интеграл Стильтеса

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau) d f(\tau) \quad (9.48)$$

при условии $\psi^*(p) = \varphi^*(p) f^*(p)$.

В линейной наследственной теории вязкоупругости для нестареющих материалов [65, 69] интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (9.49)$$

выражающее зависимость между деформациями и напряжениями для одномерной задачи строительной механики, обычно решается операционным методом. Применение к обеим частям этого уравнения преобразований Лапласа — Карсона $\varepsilon^*(p) \doteq \varepsilon(t)$, $\sigma^*(p) \doteq \sigma(t)$, $K^*(p) \doteq K(t)$ и использование теоремы о свертке (9.48) дает изображение искомой функции

$$\sigma^*(p) = \frac{E}{1 + (1/p) K^*(p)} \varepsilon^*(p),$$

где $K^*(p)$ — изображение ядра ползучести.

Полученное выражение в изображениях имеет вид, похожий на закон Гука для одномерной задачи теории упругости $\sigma = E\varepsilon$. Это соответствие еще более ярко прослеживается, если соотношение между деформациями и напряжениями для вязкоупругого тела (9.49) выразить с помощью интеграла Стильтеса через функцию ползучести для нестареющего материала $\Pi(t-\tau)$:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau). \quad (9.50)$$

Отсюда на основании теоремы о свертке (9.48) получается простое выражение в изображениях по Лапласу — Карсону

$$\varepsilon^*(p) = \Pi^*(p) \sigma^*(p), \quad (9.51)$$

которое по форме полностью совпадает с выражением для закона Гука.

Таким образом, для одномерных задач линейной наследственной теории вязкоупругости аналогом закона Гука в изображениях по Лапласу — Карсону является выражение (9.51), а в оригиналах (9.50).

Интеграл Стильтеса обладает всеми свойствами определенного интеграла и для случая свертки двух функций $\varphi(t)$ и $f(t)$, одна из которых имеет точки разрыва первого рода $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < t$, вычисляется по формуле

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) df(\tau) = \varphi(t-\tau_1) (f(\tau_1+0) - f(\tau_1-0)) + \\ + \varphi(t-\tau_2) (f(\tau_2+0) - f(\tau_2-0)) + \dots + \int_0^t \varphi(t-\tau) f'(\tau) d\tau, \quad (9.52)$$

где второе слагаемое в правой части включается в сумму правой части только с момента времени $t = \tau_2$. Вид разрывной функции $\varphi(t)$ представлен на рис. 9.4. Основное преимущество, благодаря которому интеграл Стильтеса успешно применяется в наследственной теории вязкоупругости, - возможность рассматривать непосредственно, не делая предельных переходов, случаи мгновенного приложения нагрузки или мгновенного деформирования систем.

Решение практических задач линейной наследственной теории вязкоупругости с применением интегрального преобразования Лапласа - Карсона основано на использовании *принципа соответствия Вольтерра*, который заключается в следующем. Для решения статических задач теории вязкоупругости следует найти решение соответствующей задачи теории упругости и в окончательном результате заменить функции, являющиеся в задаче теории вязкоупругости функциями времени (напряжения, деформации, перемещения и нагрузки), их изображениями по Лапласу - Карсону. Эта операция сводится к формальному приписыванию всем этим функ-

Табл. 9.2. Преобразования Лапласа — Карсона ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $t > 0$)

$f(t)$	$f^*(p)$	$f(t)$	$f^*(p)$
1	1	$\cos at$	$\frac{p^2}{p^2 + a^2}$
a	a	$\sin at$	$\frac{ap}{p^2 + a^2}$
t	$\frac{1}{p}$	$\text{ch } at$	$\frac{p^2}{p^2 - a^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{sh } at$	$\frac{ap}{p^2 - a^2}$
$t^{-n} \frac{1}{\Gamma(1-n)}$	p^n	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{p(p+b)}{(p+b)^2 + a^2}$
e^{-at}	$\frac{p}{p+a}$	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{pa}{(p+b)^2 + a^2}$
$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{t} \right)^{1/2}$	pe^{-ap}

циям индекса — «звездочки». Кроме того, в этом результате следует заменить упругие постоянные материала изображениями соответствующих функций времени теории вязкоупругости. Например, $1/E \rightarrow \rightarrow P^*(p)$, $1/(2G) \rightarrow P_c^*(p)$, $E \rightarrow R^*(p)$, где E и G — модули упругости и сдвига материала; $P^*(p)$, $P_c^*(p)$ и $R^*(p)$ — изображения по Лапласу

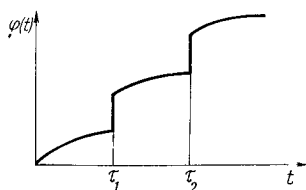


Рис. 9.4. Функция $\varphi(t)$ с разрывами первого рода

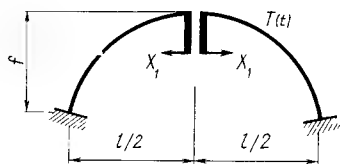


Рис. 9.5. Расчетная схема арки

су — Карсону функций ползучести $\Pi(t)$, сдвиговой ползучести $\Pi_c(t)$ и релаксации $R(t)$.

Заключительный этап решения задачи теории вязкоупругости состоит в переходе от изображений к оригиналам.

Пример 9.10. Раскрыть статическую неопределимость бесшарнирной арки из вязкоупругого материала. Арка, расчетная схема которой изображена на рис. 9.5, подвергается переменному во времени температурному воздействию $T(t)$.

Из расчета арки в упругой стадии деформирования на действие температуры [76] запишем значение горизонтального усилия X_1 , приложенного в упругом центре:

$$X_1 = 45\alpha T E I_c / (4(1 + \mu) j^2), \quad (9.53)$$

где μ — геометрическая характеристика арки; I_c — момент инерции ключевого (среднего) сечения; j — стрела подъема; E — модуль упругости материала; $\alpha = \text{const}$ — коэффициент температурного расширения материала.

Обозначим из решения (9.53) через C величину, не зависящую от t , т. е. $C = 45\alpha I_c / (4(1 + \mu) j^2)$. Тогда $X_1 = C E T$.

Согласно принципу Вольтерра, решение соответствующей задачи теории вязкоупругости в изображениях по Лапласу. Карсону при замене модуля упругости изображением функции релаксации $E \rightarrow R^*(p)$ будет

$$X_1^*(p) = C R^*(p) T^*(p). \quad (9.54)$$

Используем в данном решении метод параметров [34]. В соответствии с этим методом функцию релаксации $R(t)$, полученную на основании экспериментальных исследований материала арки, представляем в аналитическом виде как сумму экспоненциальных сплайнов

$$R(t) = R(0) (h(t) - a t^\alpha e^{-\beta t} h(t) - b (1 - e^{\beta(t-\xi)}) h(t - \xi)), \quad (9.55)$$

где $R(0)$, a , b , α , β , ξ — параметры, определенные на основании эксперимента; $h(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Полагаем, что арка выполнена из материала, экспериментальные кривые релаксации которого известны [34], и упомянутые параметры определены: $R(0) = 19,6 \cdot 10^2$ МПа; $a = 0,083$; $b = 0,774$; $\alpha = 0,656$; $\beta = 0,033$; $\xi = 0,048$; $\xi = 3$.

Изменение температуры во времени $T(t)$ аппроксимируется с помощью функции Хевисайда

$$T(t) = T_0 h(t) + T_1 h(t - t_1) + T_2 h(t - t_2) + \dots \quad (9.56)$$

Переходя от решения в изображениях (9.54) к оригиналам, используем теорему о свертке (9.48): $X_1(t) = C \int_0^t R(t - \tau) dT(\tau)$. Полученный интеграл Стильеса вычис-

лим по (9.52) при $T(t)$, представленной (9.56):

$$X_1(t) = C(R(t)T_0 + R(t-t_1)T_1|_{t \geq t_1} + R(t-t_2)T_2|_{t \geq t_2} + \dots). \quad (9.57)$$

Функция релаксации $R(t)$ определяется по (9.55) при известных значениях параметров и заданном t .

Полученное решение (9.57) определяет значение искомого горизонтального усилия $X_1(t)$ в зависимости от t . Таким образом, статическая неопределимость заданной арки из вязкоупругого материала раскрыта. Теперь легко найти внутренние усилия и перемещения при заданном изменении температуры.

9.3.6. Преобразование Фурье

В некоторых задачах строительной механики, в частности в задачах динамики сооружений [68], в плоской задаче теории упругости [65], интегральное преобразование Фурье позволяет свести задачу об интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений для изображений искомых функций.

Если $f(t)$ — действительная функция, кусочно-гладкая или кусочно-монотонная на любом интервале, для которой существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, то преобразование Фурье этой функции, называемой оригиналом, определяется следующим выражением:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (9.58)$$

где функция $\tilde{f}(\omega)$ действительной переменной ω называется изображением функции $f(t)$ по Фурье: $\tilde{f}(\omega) \doteq f(t)$.

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (9.59)$$

Основные свойства преобразования Фурье заключаются в следующем:

1) свойство линейности: если $\tilde{f}_1(\omega) \doteq f_1(t)$ и $\tilde{f}_2(\omega) \doteq f_2(t)$, то

$$(af_1(t) + bf_2(t)) \sim a\tilde{f}_1(\omega) + b\tilde{f}_2(\omega);$$

2) свойство подобия: если $f(t) \doteq \tilde{f}(\omega)$, $\alpha > 0$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right);$$

3) сдвиг аргумента: $f(t \pm \tau) \doteq e^{\pm i\omega\tau} \tilde{f}(\omega)$;

4) теорема о свертке: если за свертку двух функций $f_1(t) * f_2(t)$

принять интеграл $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$, то

Табл. 9.3. Преобразования Фурье

$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$	$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$(\pi/2)^{1/2}$ при $ \omega < a$ 0 при $ \omega > a$	$\frac{e^{-a t }}{ t ^{1/2}}$	$\frac{((a^2 + \omega^2)^{1/2} + a)^{1/2}}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}$
$e^{-\alpha t + i\omega t} \quad (t > 0)$ $ t ^{-1/2}$	$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}(\alpha - \omega + ic)}$ $ \omega ^{-1/2}$	$(a^2 - t^2)^{1/2} \quad (t < a)$	$(\pi/2)^{1/2} J_0(a\omega)$

$$(f_1(t)f_2(t)) \sim \tilde{f}_1(\omega) * \tilde{f}_2(\omega); \quad \tilde{f}_1(\omega)\tilde{f}_2(\omega) = (f_1(t) * f_2(t)) \sim;$$

5) дифференцирование оригинала:

$$(f^{(r)}(t)) \sim (-i\omega)^r \tilde{f}(\omega). \quad (9.60)$$

Примеры некоторых преобразований Фурье (оригиналы и соответствующие им изображения) приведены в табл. 9.3. Более подробные таблицы можно найти, например, в справочнике [44].

Если функция-оригинал $f(t)$ является четной, т. е. $f(-t) = f(t)$, для нее справедливо косинус-преобразование Фурье

$$\tilde{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$$

и обратное преобразование

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_c(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Если функция-оригинал $f(t)$ является нечетной, т. е. $f(-t) = -f(t)$, для нее справедливо синус-преобразование Фурье

$$\tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt$$

и обратное преобразование

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_s(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Примеры косинус- и синус-преобразований Фурье приведены в табл. 9.4.

При решении с помощью преобразования Фурье краевых задач строительной механики дифференциальные уравнения в частных производных приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые решают известными методами.

Процедура преобразования и решения состоит в том, что все

Табл. 9.4. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Косинус-преобразования		Синус-преобразования	
$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$	$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
e^{-t}	$(2/\pi)^{1/2} \frac{1}{1+\omega^2}$	e^{-t}	$(2/\pi)^{1/2} \frac{\omega}{1+\omega^2}$
$\cos(t^2/2)$	$\cos\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	$te^{-t^2/2}$	$\omega e^{-\omega^2/2}$
$\sin(t^2/2)$	$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{2}\right)$	$\frac{1}{t} \sin t$	$(2\pi)^{-1/2} \ln \left \frac{1+\omega}{1-\omega} \right $

члены уравнения (или системы уравнений) в частных производных, включая граничные условия, умножают на ядро преобразования Фурье и выполняют интегрирование в соответствующих пределах. Выбор ядра преобразования зависит от вида дифференциального уравнения и граничных условий. Операции преобразования должны выполняться так, чтобы преобразованные уравнения не содержали исключаемой переменной. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие изображения неизвестных функций и их производных, которые удовлетворяют преобразованным по Фурье граничным условиям. Решение этих уравнений дает значения изображений искомых функций, оригиналы которых определяют с помощью обратного преобразования (9.59).

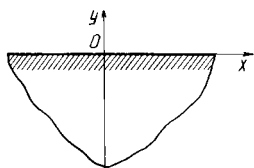
Пример 9.11. Найти напряжения в упругой среде, ограниченной полуплоскостью. В заданной системе координат xOy границей полуплоскости $-\infty < y < 0$ является ось x (рис. 9.6). На границе полуплоскости $y=0$ заданы нормальные и касательные напряжения [65]:

$$\sigma_y(x, 0) = -q(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0. \quad (9.61)$$

Система уравнений равновесия в напряжениях имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.62)$$

Для решения поставленной задачи, т. е. для нахождения возникающих в данной среде напряжений, используем преобразования Фурье (9.58). После умножения уравнений равновесия (9.62) почленно на $e^{i\omega x}$ и интегрирования по x в пределах от $-\infty$ до ∞ с учетом свойства дифференцирования оригинала (9.60) получаем систему уравнений равновесия в изображениях



$$\left. \begin{aligned} -i\omega \tilde{\sigma}_x(\omega) + \tilde{\tau}'_{xy}(\omega) &= 0; \\ -i\omega \tilde{\tau}_{xy}(\omega) + \tilde{\sigma}'_y(\omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

Рис. 9.6. Упругая среда, ограниченная плоскостью

где штрихами обозначены производные по переменной y .

Граничные условия (9.61) после их преобразования по Фурье принимают вид:

$$\tilde{\sigma}_y(\omega, 0) = -\tilde{q}(\omega); \quad \tilde{\tau}_{xy}(\omega, 0) = 0. \quad (9.64)$$

Поскольку все компоненты напряженного состояния в плоской задаче теории упругости описываются бигармоническими функциями, для σ_y выполняется условие

$$\frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial y^4} = 0,$$

откуда после выполнения преобразования Фурье получаем обыкновенное дифференциальное уравнение в изображениях

$$\tilde{\sigma}_y^{IV}(\omega) - 2\omega^2 \tilde{\sigma}_y''(\omega) + \omega^4 \tilde{\sigma}_y(\omega) = 0.$$

Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения

$$\tilde{\sigma}_y(\omega) = (A + B y) e^{-|\omega| y}, \quad (9.65)$$

где $+\omega$ и $-\omega$ представляют собой двойные корни характеристического уравнения. Дифференцирование изображения (9.65) по y дает

$$\tilde{\sigma}_y'(\omega) = (A|\omega| + B|\omega|y + B) e^{-|\omega| y}. \quad (9.66)$$

Постоянную A определяем подстановкой (9.65) в граничные условия (9.64): $A = -\tilde{q}(\omega)$; постоянную B — из второго уравнения равновесия (9.63) с учетом (9.64), (9.66) и найденного значения для A : $B = |\omega| \tilde{q}(\omega)$. При известных значениях A и B изображение функции σ_y по (9.65) принимает вид

$$\tilde{\sigma}_y(\omega) = -\tilde{q}(\omega) (1 + |\omega| y) e^{-|\omega| y}. \quad (9.67)$$

Изображения компонент напряженного состояния $\tilde{\sigma}_x$ и $\tilde{\tau}_{xy}$ определяем из уравнений (9.63)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_x(\omega) &= \tilde{q}(\omega) (1 + |\omega| y) e^{-|\omega| y}, \\ \tilde{\tau}_{xy}(\omega) &= -i\omega \tilde{q}(\omega) y e^{-|\omega| y}. \end{aligned} \right\} \quad (9.68)$$

От полученных выражений для изображений компонент напряженного состояния можно легко перейти к оригиналам, используя обратное преобразование Фурье (9.59). Так, например, для σ_y получаем

$$\sigma_y = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\omega) (1 + |\omega| y) e^{-|\omega| y} e^{-i\omega x} d\omega,$$

где изображение нагрузки находим по определению преобразования Фурье (9.58):

$$\tilde{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi.$$

С учетом этого выражения получим

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\omega| y) e^{-|\omega| y - i\omega(x - \xi)} d\omega. \quad (9.69)$$

Внутренний интеграл этого равенства можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega| y - i\omega(x - \xi)} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| y e^{-|\omega| y - i\omega(x - \xi)} d\omega.$$

Первый из них вычисляем с учетом $y < 0$, а также из условия, что из $|\omega|$ для $\omega > 0$ корень характеристического уравнения $+\omega$, а для $\omega < 0$ — $-\omega$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega y - i\omega(x-\xi)} d\omega &= \int_{-\infty}^0 e^{-\omega y - i\omega(x-\xi)} d\omega + \int_0^{\infty} e^{\omega y - i\omega(x-\xi)} d\omega = \\
&= - \left. \frac{e^{-\omega y - i\omega(x-\xi)}}{y + i(x-\xi)} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{\omega y - i\omega(x-\xi)}}{-y + i(x-\xi)} \right|_0^{\infty} = \\
&= - \frac{1}{y + i(x-\xi)} + \frac{1}{-y + i(x-\xi)} = - \frac{2y}{r^2},
\end{aligned}$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + y^2$.

Аналогично вычисляем второй (внешний) интеграл и находим σ_y по (9.69) по (9.69).

Подобным же образом производим переход от изображений по Фурье (9.68) для σ_x и τ_{xy} , в результате получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) y (x-\xi)^2}{r^4} d\xi; \quad \sigma_y = - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) y^3}{r^4} d\xi; \\
\tau_{xy} &= - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\xi) y^2 (x-\xi)}{r^4} d\xi.
\end{aligned}$$

10. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Вариационные методы решения задач строительной механики при всех их преимуществах имеют и некоторые слабые стороны, в том числе необходимым условием их применения является положительно определенный оператор задачи. По этой причине вариационные методы оказываются недостаточно хорошо приспособленными к случаю решения задач для бесконечных областей. От этого недостатка свободны методы решения начальных и краевых задач строительной механики, основанные на теории потенциала, т. е. метод потенциалов и метод граничных элементов.

Первый из них применяется в основном для решения задач, которые приводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Метод граничных элементов основан на сочетании идей теории потенциала с методами теории аппроксимации [9, 10]. Он особенно эффективен для бесконечных и полубесконечных областей, однако при его использовании необходимо иметь фундаментальное решение уравнений задачи для рассматриваемой области. Оба метода, основанные на теории потенциала, связаны с большим объемом вычислений, и поэтому их применение полностью ориентировано на использование ЭВМ.

10.1. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

10.1.1. Основные понятия теории потенциала

Понятие потенциала тесно связано с интегральным представлением гармонической функции, т. е. функции, являющейся решением уравнения Лапласа [52]. Причем область Ω , в которой находят решение уравнения Лапласа, может быть конечной или бесконечной. Главное, чтобы область была ограничена замкнутой поверхностью Γ , не обязательно связной (рис. 10.1).

Для интегрального представления функций класса C^2 (дважды непрерывно дифференцируемых) введены три интегральных оператора специального вида, т. е. три интеграла, зависящие от x как от

параметра: $\int_{\Gamma} \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi) d\Gamma$, $\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) \sigma(\xi) d\Gamma$, $\int_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi) d\Omega$,

называемые соответственно потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя и объемным потенциалом. Здесь $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $\rho(\xi)$ — плотности этих потенциалов; Γ — кусочно-гладкая поверх-

ность, ограничивающая область Ω ; r — расстояние между двумя точками $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ m -мерного евклидова пространства E_m :

$$r = \|x - \xi\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - \xi_k)^2};$$

v — внешняя нормаль к поверхности Γ в точке ξ (при $m=2$ $1/r^{m-2}$ заменяется на $\ln(1/r)$).

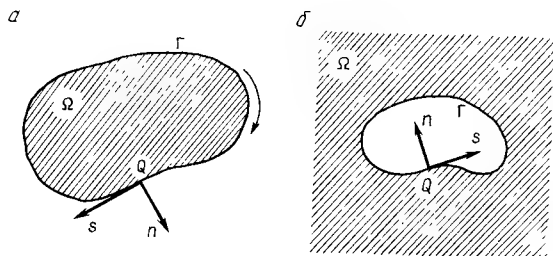


Рис. 10.1. Области Ω , ограниченные поверхностью Γ :
а — конечная, б — бесконечная

Потенциалы простого и двойного слоев удовлетворяют однородному уравнению Лапласа. Если поверхность Γ делит пространство на две области — внутреннюю и внешнюю, то оба потенциала определяют две гармонические функции: одну во внутренней области, другую — во внешней.

Функция $v(x, \xi) = 1/r^{m-2}$ в предположении, что $m > 2$, удовлетворяет однородному уравнению Лапласа и называется его сингулярным решением. Она с определенной скоростью стремится к бесконечности при $x \rightarrow \xi$. При $m=2$ сингулярным решением уравнения Лапласа является функция $v(x, \xi) = \ln(1/r)$. Эта функция гармоническая в любой конечной области, не содержащей точку ξ . Например, сингулярное решение уравнения Лапласа удовлетворяет уравнению $-\Delta v = c\delta(x - \xi)$, где δ — дельта-функция Дирака; c — некоторая постоянная.

10.1.2. Интегральное представление функции

Поверхность Γ в пространстве E_m называется ляпуновской, если она удовлетворяет следующим двум условиям Ляпунова: 1) в любой точке поверхности Γ существует определенная нормаль; 2) если $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — точки поверхности Γ , $r = \|x - \xi\|$, n и v — нормали к Γ в точках x и ξ соответственно, а ϑ — угол между этими нормалью, то при положительных постоянных a и α имеет место неравенство $\vartheta \leq ar^\alpha$.

Пусть Ω — конечная область в пространстве m переменных ($m > 2$), ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Γ , и в ней задана функция $u(\xi)$. Для $u \in C^2(\Omega)$ имеет место зависимость

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d\Gamma - \\ - \frac{1}{(m-2)|s_1|} \int_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi) d\Omega,$$

которая называется интегральным представлением функции класса $C^{(2)}$. При $m=3$ $|s_1|=4\pi$. Для $m=2$ это интегральное представление имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \Delta u(\xi) d\Omega.$$

Если $u(x)$ — гармоническая функция, то $\Delta u=0$ и интегральное представление такой функции имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d\Gamma.$$

При $m=2$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma.$$

Функция, гармоническая в некоторой области, имеет в этой области производные любого порядка.

10.1.3. Свойства потенциалов

Объемный потенциал имеет следующие свойства.

1. Если ρ измерима и ограничена в Ω , объемный потенциал

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(x)}{r^{m-2}} d\Omega \quad (10.1)$$

непрерывен и непрерывно дифференцируем во всем пространстве E_m .

2. Если $\rho \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, объемный потенциал (10.1) имеет в Ω непрерывные вторые производные и удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа:

$$-\Delta \varphi = (m-2)|s_1|\rho(x) \quad (m > 2); \quad -\Delta \varphi = 2\pi\rho(x) \quad (m=2). \quad (10.2)$$

Уравнения (10.2) позволяют находить частное решение неоднородного уравнения Лапласа и тем самым свести последнее к однородному уравнению.

Общее решение неоднородного уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(x) \quad (10.3)$$

представляет собой сумму некоторого частного решения и общего решения однородного уравнения Лапласа. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\bar{\Omega}$, частное решение уравнения (10.3)

$$u_0(x) = \frac{1}{(m-2)|S_1|} \int_{\Omega} \frac{f(x)}{r^{m-2}} d\Omega.$$

При замене неизвестной функции в уравнении (10.3) по формуле $u = u_0 + w$ получается однородное уравнение Лапласа $\Delta w = 0$.

3. Гармоническая функция, отличная от тождественной постоянной, не достигает в конечной области ни максимума, ни минимума.

Если функция $u(x)$ гармонична в конечной области Ω и, кроме того, $u \in C(\bar{\Omega})$, то $u(x)$ принимает как наибольшее, так и наименьшее значение на границе области.

Рассмотренные выше положения теории потенциалов можно распространить на уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c(x)u = 0.$$

Для таких уравнений можно найти и сингулярное решение и интегральное представление.

Потенциал двойного слоя

$$w(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma \quad (10.4)$$

есть функция гармоническая как внутри, так и вне Γ .

Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и $\sigma(\xi)$ непрерывна на этой поверхности, потенциал двойного слоя (10.4) имеет вполне определенное значение при любом x , лежащем на поверхности Γ . Это значение непрерывно меняется, когда x лежит на поверхности Γ . При $\sigma(\xi) = 1$ потенциал двойного слоя

$$w_0(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma$$

называется интегралом Гаусса.

Если поверхность замкнутая ляпуновская, а плотность потенциала на этой поверхности непрерывна, то потенциал двойного слоя равномерно стремится к своим предельным значениям как изнутри, так и извне поверхности.

Для потенциала двойного слоя (10.4), если Γ — ляпуновская поверхность и $\sigma(\xi)$ непрерывна на Γ , справедливы следующие

предельные соотношения:

$$w_i(x_0) = - \frac{(m-2)|s_1|}{2} \sigma(x_0) + \bar{w}(x_0);$$

$$w_e(x_0) = \frac{(m-2)|s_1|}{2} \sigma(x_0) + \bar{w}(x_0).$$

Здесь $w_i(x_0)$ и $w_e(x_0)$ — предельные значения потенциала $w(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$, когда $x \rightarrow x_0$ соответственно изнутри и извне Γ ; $\bar{w}(x_0)$ — прямое значение этого потенциала в точке x_0 .

Потенциал простого слоя

$$v(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma \quad (10.5)$$

непрерывен во всем пространстве E_m , если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а $\mu(\xi)$ измерима и ограничена.

Производная потенциала (10.5) по внешней нормали n к поверхности Γ , проходящей через произвольную точку $x \in \Gamma$ пространства E_m , если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, имеет вид

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n} = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma.$$

Предельное значение нормальной производной потенциала простого слоя при условии, что Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а $\mu(\xi)$ непрерывна на Γ , выражается формулами:

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_i} = \frac{(m-2)|s_1|}{2} \mu(x_0) + \frac{\partial \bar{v}(x_0)}{\partial n};$$

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial n_e} = - \frac{(m-2)|s_1|}{2} \mu(x_0) + \frac{\partial \bar{v}(x_0)}{\partial n}.$$

Здесь $\partial v(x_0)/\partial n_i$ и $\partial v(x_0)/\partial n_e$ — предельные значения нормальной производной $\partial v(x)/\partial n$, когда $x \rightarrow x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне Γ ; $\partial \bar{v}(x_0)/\partial n$ — прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя.

10.1.4. Применение метода потенциалов к решению задач Дирихле и Неймана

Для замкнутой ляпуновской поверхности Γ , ограничивающей внутреннюю область Ω и внешнюю Ω' , формулируют одновременно четыре краевые задачи для однородного уравнения Лапласа: найти функцию $u(x)$, гармоническую в области Ω или Ω' и удовлетворяющую либо условию задачи Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x), \quad (10.6)$$

либо условию задачи Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \psi(x), \quad (10.7)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ считаются непрерывными на Γ .

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле обозначаются через D_i и D_e , а внутренние и внешние задачи Неймана — через N_i и N_e соответственно. Решения этих задач находят в виде некоторых потенциалов: задачи Дирихле — в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma, \quad (10.8)$$

задачи Неймана — потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma, \quad (10.9)$$

так как эти интегральные представления функции $u(x)$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Требуется, чтобы искомые плотности $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ были непрерывны на Γ . При таком представлении решения автоматически получаются функции, гармонические в соответствующей области, и остается найти $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$, используя краевые условия и выражения (10.8), (10.9).

Вначале рассматривается задача Дирихле D_i . Краевое условие (10.6) следует понимать так: если $x \in \Omega$ и $x \rightarrow x_0 \in \Gamma$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0). \quad (10.10)$$

Но $u(x)$ есть потенциал двойного слоя, плотность которого, по предположению, непрерывна. В таком случае, согласно формуле о предельных соотношениях для потенциала двойного слоя,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = - \frac{(m-2)|s_1|}{2} \sigma(x_0) + \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi - x_0|^{m-2}} d\Gamma.$$

Подставляя это выражение в (10.10), заменив x_0 на x и разделив на $-(m-2)|s_1|/2$, можно получить интегральное уравнение для неизвестной функции $\sigma(\xi)$

$$\sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma = - \frac{2}{(m-2)|s_1|} \varphi(x). \quad (10.11)$$

Аналогично получают интегральные уравнения для трех остальных задач D_e , N_i и N_e соответственно:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma =$$

$$= \frac{2}{(m-2)|s_1|} \varphi(x); \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned} \mu(x) + \frac{2}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma = \\ = \frac{2}{(m-2)|s_1|} \psi(x); \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \mu(x) - \frac{2}{(m-2)|s_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d\Gamma = \\ = - \frac{2}{(m-2)|s_1|} \psi(x). \end{aligned} \quad (10.14)$$

В уравнениях (10.11) — (10.14) $x \in \Gamma$. Все эти уравнения — интегральные со слабой особенностью. Они называются интегральными уравнениями теории потенциала.

Пример 10.1*. Определить методом потенциалов внешние нагрузки, возникающие на поверхности бесконечно длинного кругового конуса при внедрении его в несжимаемую жидкость (рис. 10.2).

Течение жидкости из состояния покоя под действием давления конуса при отсутствии вихрей является потенциальным и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad (10.15)$$

где Φ — потенциал скоростей возмущенного движения жидкости.

Граничные условия определяются равенством нормальных составляющих скоростей движения жидкости на стенке конуса и движения тела

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n, \quad (10.16)$$

а также равенством нулю потенциала скоростей на бесконечном удалении от тела ($\Phi = 0$). Кроме того, еще одно граничное условие заключается в постоянстве давления на поверхности жидкости:

$$p = p_0 = \text{const.} \quad (10.17)$$

Заметим, что из решения уравнения (10.15) и соответствующих граничных условий можно определить поле скоростей жидкости

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi,$$

а из интеграла Лагранжа — поле давлений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = c(t)$$

(ρ_0 — плотность жидкости), а следовательно, и внешние силы, действующие на погружающееся в жидкость тело.

При безграничном удалении от тела, т. е. при $v \rightarrow 0$, $\partial \Phi / \partial t \rightarrow 0$, с учетом (10.17) получим $c(t) = P_0 / \rho_0$; интеграл Лагранжа может быть представлен в виде

* Решение этого примера предложено В. В. Костылевым.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Потенциал скоростей Φ возмущенного движения жидкости, удовлетворяющий однородному уравнению Лапласа (10.15), определяется как потенциал простого слоя

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \frac{q(\Omega)}{R} d\Omega, \quad (10.18)$$

где Ω — выбранная поверхность интегрирования. $R = ((\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2)^{1/2}$; $q(\Omega)$ — плотность потенциала простого слоя.

Потенциал (10.18) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = 0$$

во всех точках пространства, не лежащих на поверхности Ω , по которой производится интегрирование. В данном случае за поверхность интегрирования принимаем поверхность погруженной части конуса Ω_1 и ее зеркального отображения относительно свободной поверхности Ω_2 . Тогда потенциал простого слоя можно представить в виде

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \left(\iint_{\Omega_1} \frac{q(\xi, \eta, \zeta)}{R_1} d\Omega + \iint_{\Omega_2} \frac{q(\xi, \eta, -\zeta)}{R_2} d\Omega \right), \quad (10.19)$$

Рис. 10.2. Внедрение бесконечно длинного конуса в несжимаемую жидкость (точка M_0 находится на поверхности жидкости)

где $R_1 = ((\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2)^{1/2}$; $R_2 = ((\xi_0 - \xi)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 + \zeta)^2)^{1/2}$.

Для удовлетворения граничных условий на свободной поверхности ($\Phi = 0$) следует принять $q(\xi, \eta, \zeta) = -q(\xi, \eta, -\zeta)$.

Потенциал скоростей из (10.19)

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_1} q(\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) d\Omega. \quad (10.20)$$

Плотность простого слоя $q(\xi, \eta, \zeta)$ определяется из граничного условия (10.16) на конусе

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = j \sin \gamma, \quad (10.21)$$

где $j = \partial j / \partial t$ — скорость внедрения конуса в жидкость; γ — половина угла конусности.

Согласно теории потенциала, производная на самой несущей поверхности от потенциала простого слоя по направлению внешней нормали n к несущей по-

верхности слоя определяется формулой

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{2} q(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} q(\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_1} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_2} \right) d\Omega, \quad (10.22)$$

где координаты с нулевым индексом соответствуют точке, в которой определяется потенциал скоростей.

С учетом (10.21) и (10.22)

$$q(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 2\dot{f} \sin \gamma + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} q(\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_1} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_2} \right) d\Omega,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial n}; \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{R_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial n};$$

$q(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ — плотность простого слоя на несущей поверхности (в точке M_0 на рис. 10.2).

Переходим к системе координат, связанной с поверхностью погруженной части конуса: $\gamma, \varphi, y = r/r_1, y_0 = r_0/r_1$. С учетом симметрии задачи $\xi_0 = r_1 y_0 \sin \gamma$; $\xi = r_1 y \sin \gamma \cos \varphi$; $\eta_0 = 0$; $\eta = r_1 y \sin \gamma \sin \varphi$; $\zeta_0 = r_0(1 - y_0) \cos \gamma$, $\zeta = r_1(1 - y) \cos \gamma$. На поверхности конуса $\gamma - \gamma_0 = \text{const}$ двойные интегралы по Ω_1 путем интегрирования по φ сводим к простым интегралам и получаем интегральное уравнение для определения плотности простого слоя:

$$q(y_0) = 2\dot{f} \sin \gamma - \frac{\text{ctg } \gamma}{2\pi y_0^{3/2}} \int_0^1 y^{1/2} q(y) \left(k_1^3 D(k_1) - k_2^3 D(k_2) \right) + \\ + \frac{k_2^3}{1 - k_2^2} \left(1 - \frac{1}{y} \right) E(k_2) dy, \quad (10.23)$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; $D(k) = (K(k) - E(k))/k^2$; $k_1^2 = 4y_0 y / ((y_0 + y)^2 + (y_0 - y)^2 \text{ctg}^2 \gamma)$, $k_2^2 = 4y_0 y / ((y_0 + y)^2 + (2 - y_0 - y)^2 \text{ctg}^2 \gamma)$.

Уравнение (10.23) относится к классу сингулярных интегральных уравнений. Его решение можно найти методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения принимаем $q_0(y_0) = 2\dot{f} \sin \gamma$. Подставляя его в правую часть уравнения (10.23), получим для первого приближения

$$q_1(y_0) = 2\dot{f} \sin \gamma \left(1 + \frac{\text{ctg } \gamma}{\pi y_0} \int_0^1 \left(\frac{yK(k_2) + ((k_2^2 - y)/(1 - k_2^2))E(k_2)}{\kappa_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{yE(k_1) - yK(k_1)}{\kappa_1} \right) dy \right), \quad (10.24)$$

где $\kappa_1^2 = (y_0 + y)^2 + (y_0 - y)^2 \text{ctg}^2 \gamma$; $\kappa_2^2 = (y_0 + y)^2 + (2 - y_0 - y)^2 \text{ctg}^2 \gamma$.

Можно показать, что значение второго слагаемого в скобках в (10.24) при $\gamma < 40^\circ$ мало по сравнению с единицей. Поэтому с достаточной степенью точности значение плотности простого слоя может быть принято по нулевому приближению: $q(y_0) = 2\dot{f} \sin \gamma$. Отсюда на основании (10.20) выражение для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости можно представить в виде

$$\Phi = \frac{i\dot{f}}{2} F, \quad (10.25)$$

где F — функция распределения, определяемая выражением

$$F = - \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\pi y_0^{1/2}} \int_0^1 y^{1/2} (k_1 K(k_1) - k_2 K(k_2)) dy.$$

Давление в любой точке погружающегося в жидкость конуса определяется из линеаризованного интеграла Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (10.26)$$

где на основании (10.25)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\dot{f}^2 F + \ddot{f} \dot{f} F + \dot{f} \ddot{f} \frac{\partial F}{\partial t} \right). \quad (10.27)$$

Функция распределения F является сложной функцией времени

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \gamma_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t},$$

а на поверхности погружающегося конуса в связанной с телом системе координат ($\gamma = \gamma_0 = \text{const}$)

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = - \frac{\dot{f}}{f} y_0, \quad \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = 0 \quad (10.28)$$

(в дальнейшем индекс нуль у y опущен).

Сила сопротивления жидкости при погружении конуса, которая для него является внешней нагрузкой,

$$Q = \iint_{\Omega_1} (p - p_0) \sin \gamma d\Omega, \quad (10.29)$$

где $d\Omega = f^2 \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma} y dy d\varphi$.

Подставив (10.26) с учетом (10.27), (10.28) в (10.29) и произведя интегрирование по φ , получим выражение

$$Q = f^2 (\dot{f}^2 \alpha_1 + \ddot{f} \dot{f} \lambda_1), \quad (10.30)$$

где $\alpha_1 = \pi \rho_0 \operatorname{tg}^4 \gamma \int_0^1 (F_1 + \Delta F_1) y dy$; $F_1 = F / \operatorname{tg}^2 \gamma$; $\Delta F_1 = - y dF_1 / dy$; $\lambda_1 = \pi \rho_0 \operatorname{tg}^4 \gamma \times$
 $\times \int_0^1 (F_1 + \Delta F_1) y dy$.

В уравнениях (10.26) и (10.30) остается неизвестным $\dot{f}$, для определения которого на основе принципа Д'Аламбера составим уравнение движения конуса

$$m \ddot{f} = -f^2 (\dot{f}^2 \alpha_1 + \ddot{f} \dot{f} \lambda_1),$$

где m — масса конуса.

Исходя из начальных условий при $t=0$ ($\dot{f} = v_0$, $f=0$), решение этого уравнения получим в виде

$$\dot{f} = \frac{v_0}{(1 + \lambda \dot{f}^3)^{\alpha/(3\lambda)}}; \quad \ddot{f} = - \frac{\alpha v_0^2 \dot{f}^2}{(1 + \lambda \dot{f}^3)^{2\alpha/(3\lambda) + 1}}. \quad (10.31)$$

Максимальные перегрузки конус будет испытывать при глубине погружения, соответствующей максимуму функции $\ddot{f}$ из (10.31). Приравнивая нулю первую

производную по f от $\tilde{f}$, находим условие для определения этого максимума: $j = (2/(2\alpha + \lambda))^{1/2}$; $\alpha = \alpha_1/m$; $\lambda = \lambda_1/m$.

При известных внешних силах, действующих на погружающееся в жидкость тело, можно определить его напряженно-деформированное состояние.

10.2. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

10.2.1. Основы метода. Теорема взаимности

Существует несколько разновидностей метода граничных элементов. Наиболее наглядный из них — прямой метод граничных интегралов [47]. Его идеи легко выявляются при рассмотрении плоского напряженного состояния или плоской деформации области Ω , ограниченной контуром Γ . Область может быть либо конечной (внутри контура Γ), либо бесконечной (вне контура Γ), как показано на рис. 10.1.

В любом случае с каждой точкой контура Γ связывают касательные и нормальные смещения u_s и u_n , касательные и нормальные напряжения σ_s и σ_n . Эти величины обычно задают относительно местной для каждой точки контура системы координат s, n .

В основе прямого метода граничных интегралов лежит теорема взаимности, которая связывает решение двух различных краевых задач для одной и той же области Ω .

Пусть одна из краевых задач характеризуется смещениями u_s, u_n и напряжениями σ_s и σ_n на контуре Γ области Ω , а другая — смещениями u'_s, u'_n и напряжениями σ'_s, σ'_n . Работа, производимая первой системой сил (σ_s и σ_n) на перемещениях, вызванных второй системой сил (u'_s и u'_n), равна работе, производимой второй системой сил (σ'_s и σ'_n) на перемещениях, вызванных первой системой сил (u_s и u_n), т. е.

$$\int_{\Gamma} (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \int_{\Gamma} (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds. \quad (10.32)$$

Если u'_s, u'_n, σ'_s и σ'_n известны (вторая задача), (10.32) является интегральным уравнением относительно неизвестных граничных параметров первой задачи. При этом решение второй задачи называется тестовым или контрольным.

Пример 10.2. Определить продольное удлинение δ , однородного стержня, сжатого двумя одинаковыми и противоположно направленными силами F (рис. 10.3, а) [80].

Рассмотрим простое осевое растяжение стержня (рис. 10.3, б). Для этого случая найдем поперечное сужение стержня $\delta_2 = \nu \sigma h / (EA)$, где A — площадь поперечного сечения стержня; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости материала. Согласно теореме взаимности,

$$F \nu \sigma h / (EA) = \sigma \delta_1, \text{ откуда } \delta_1 = \nu F h / (EA).$$

Аналогично используется теорема взаимности и в методике граничных элементов. Если контур Γ аппроксимировать с помощью N примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков (граничных

элементов), уравнение (10.32) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Delta s^j} (\sigma_s u'_s + \sigma_n u'_n) ds = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta s^j} (\sigma'_s u_s + \sigma'_n u_n) ds,$$

где Δs^j — j -й отрезок, длина которого равна $2a^j$.

Если предположить, что для рассматриваемой задачи смещения

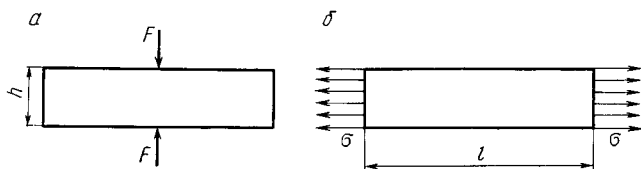


Рис. 10.3. Однородный стержень, сжатый двумя силами F (а), и осевое растяжение этого стержня (б)

и напряжения на границе в пределах каждого отрезка постоянны, это равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} u'_s ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} u'_n ds &= \\ = \sum_{j=1}^N u_s^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_s ds + \sum_{j=1}^N u_n^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_n ds, \end{aligned} \quad (10.33)$$

где σ_s^j , σ_n^j и u_s^j , u_n^j — значения напряжений и смещений в центре j -го отрезка.

Поскольку число граничных элементов равно N , в итоге будет $4N$ граничных параметров u_s^j , u_n^j , σ_s^j и σ_n^j . Половина из них, как правило, задана граничными условиями рассматриваемой задачи, а другая половина — неизвестные, которые необходимо найти. При этом предполагается известным решение контрольной задачи (u'_s , u'_n , σ'_s и σ'_n).

10.2.2. Построение системы уравнений метода

Уравнение (10.33) содержит $2N$ неизвестных. Следовательно, для их отыскания необходимо иметь еще $2N - 1$ уравнений, аналогичных (10.33), т. е. в целом для заданной области Ω — $2N$ различных контрольных решений. Контрольное решение находят, полагая, что на границе в центре каждого i -го элемента действуют касательная и нормальная силы F_s^i и F_n^i . При действии касательных сил F_s^i ($i = 1, 2, \dots, N$) получают N контрольных решений в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} u'_s(F_s^i) ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} u'_n(F_s^i) ds &= \\ = \sum_{j=1}^N u_s^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_s(F_s^i) ds + \sum_{j=1}^N u_n^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_n(F_s^i) ds. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Аналогично записываются N контрольных решений, отвечающих нормальным силам F_n^i ($i=1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} u_s'(F_n^i) ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} u_n'(F_n^i) ds = \\ = \sum_{j=1}^N u_s^j \int_{\Delta s^j} \sigma_s'(F_n^i) ds + \sum_{j=1}^N u_n^j \int_{\Delta s^j} \sigma_n'(F_n^i) ds. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Уравнения (10.34) и (10.35) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \sigma_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \sigma_n^j &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} u_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} u_n^j; \\ \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \sigma_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \sigma_n^j &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} u_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} u_n^j, \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

где i принимает значения от 1 до N .

Приведенные уравнения составляют основу прямого метода граничных интегралов. Неизвестными в этой системе уравнений являются фактические граничные смещения или напряжения, которые не заданы условиями задачи. Коэффициенты влияния $B_{ss}^{ij} = \int_{\Delta s^j} u_s'(F_s^i) ds$, $A_{ss}^{ij} = \int_{\Delta s^j} \sigma_s'(F_s^i) ds$ и др. вычисляют для каждой задачи по контрольным решениям.

Основную систему алгебраических уравнений (10.36) для всех типов краевых задач, включая смешанную краевую задачу, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} X_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} X_n^j &= Y_s^i; \\ \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} X_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} X_n^j &= Y_n^i. \end{aligned} \right\}$$

В этих уравнениях Y_s^i и Y_n^i — линейные комбинации известных граничных параметров, а $C_{ss}^{ij}, \dots$ — коэффициенты влияния при неизвестных граничных параметрах X_s^j и X_n^j . Уравнения применимы как для внутренних областей (конечное тело), так и для внешних (полость в бесконечном теле).

10.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

10.3.1. Выбор контрольных решений

Рассматривается бесконечная плоскость с контуром Γ на ней (рис. 10.4, а). Если в некоторой точке p приложена сила $F_i =$

$= (F_x, F_y)$, то, используя результаты решения задачи Кельвина, можно вычислить смещения и напряжения в любой точке плоскости [47]. Компоненты $F_x > 0$ и $F_y > 0$ имеют размерность силы, деленной на длину, и представляют собой нагрузки, приложенные вдоль оси z в бесконечной упругой среде (рис. 10.4, б) с характеристиками G и ν .

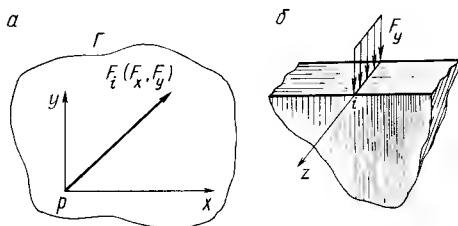


Рис. 10.4. Бесконечная плоскость с выделенным на ней контуром Γ :

а — точка p на плоскости, б — нагрузка, распределенная по оси z

Решение этой задачи можно выразить через функцию

$$g(x, y) = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (10.37)$$

Смещения вдоль осей x и y

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{F_x}{2G} \left[(3-4\nu)g - x \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \frac{F_y}{2G} \left(-y \frac{\partial g}{\partial x} \right); \\ u_y &= \frac{F_x}{2G} \left(-x \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{F_y}{2G} \left[(3-4\nu)g - y \frac{\partial g}{\partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.38)$$

Напряжения для задачи Кельвина в случае плоской деформации определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= F_x \left[2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + F_y \left(2\nu \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right); \\ \sigma_y &= F_x \left(2\nu \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + F_y \left[2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]; \\ \tau_{xy} &= F_x \left[(1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial y} - x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + F_y \left[(1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial x} - y \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

где производные функции $g(x, y)$ находят непосредственно из (10.37)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2+y^2}; \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2+y^2}; \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

Отсюда видно, что функции (10.39) в точке $x=y=0$ имеют особенности.

На рис. 10.4 сила $F_i=(F_x, F_y)$ помещена в начале координат лишь для упрощения записей. Если эта сила находится в точке $x=c_x$, $y=c_y$, можно сразу получить решение, заменив в приведенных формулах координаты x и y на преобразованные координаты $(x-c_x)$ и $(y-c_y)$.

С помощью приведенного решения можно, в частности, вычислить касательные и нормальные смещения и напряжения во всех точках контура Γ . В случае, когда область Ω внутренняя (см. рис. 10.1, а), а точка p находится вне контура Γ , из способа определения напряжений следует, что если удалить область, внешнюю по отношению к Γ , то оставшаяся область, т. е. область Ω , будет находиться в равновесии при действии напряжений на Γ . Следовательно, эти напряжения и соответствующие им смещения образуют возможное для рассматриваемой задачи контрольное решение.

Это рассуждение несправедливо, если точка p находится внутри контура Γ . Рассматривая силу внутри границы, нужно представить вокруг точки ее приложения малое отверстие и считать, что сила действует на контуре этого отверстия. Тогда область Ω будет иметь как бы две границы — контур Γ и границу отверстия вокруг точки p .

Приведенные рассуждения остаются справедливыми и в случае, когда Ω представляет неограниченную область вне контура Γ (рис. 10.1, б). Следовательно, для обеих задач (внешней и внутренней областей) необходимо, чтобы при отыскании контрольного решения сила была приложена в точке p вне области Ω . Фактически обеспечиваются два контрольных решения, поскольку такая сила разлагается на две составляющие, образующие между собой прямой угол. Каждая составляющая дает решение для смещений u'_s, u'_n и напряжений σ'_s, σ'_n , интегрированием которых, согласно (10.33), получают коэффициенты в уравнениях (10.34) и (10.35).

Для определения коэффициентов $2N$ уравнений нужно ввести N сил в N различных точках неограниченной плоскости, но не в самой области Ω . За исключением этого единственного ограничения, точки могут быть выбраны произвольно, но при этом нет гарантии, что матрица полученной системы уравнений будет хорошо обуслов-

ленной или уравнения линейно независимыми. Подход, который, как установлено, приводит к хорошо обусловленным матрицам, заключается в последовательном выборе N контрольных точек в серединах отрезков контура Γ . Точнее, силы необходимо считать приложенными в серединах N отрезков снаружи области Ω .

10.3.2. Вычисление коэффициентов влияния

В прямом методе граничных интегралов коэффициенты влияния получают, считая силы (с компонентами F_s^i и F_n^i) приложенными в средней точке i -го отрезка контура Γ , путем интегрирования смещений и напряжений, вызванных этими силами, вдоль j -го отрезка в соответствии с (10.34) и (10.35). Рассмотрев N отрезков, приходят к необходимой системе алгебраических уравнений (10.36).

При вычислении коэффициентов влияния в (10.36) используют локальную систему координат $\bar{x}, \bar{y}$ с началом в центре j -го отрезка контура Γ (рис. 10.5). Эти координаты соответствуют обычным местным координатам s^j и n^j , причем ось $\bar{x}$ (или s^j) направлена по направлению обхода контура, а ось $\bar{y}$ (или n^j) направлена из рассматриваемой области (см. рис. 10.1).

Пусть нужно вычислить смещения и напряжения на j -м отрезке, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в центре i -го отрезка (в точке $[i]$ на рис. 10.5). Компоненты этой силы, параллельный и перпендикулярный i -му отрезку, равны F_s^i и F_n^i . Компоненты силы в направлениях $\bar{x}=s^j$ и $\bar{y}=n^j$ определяются выражениями:

$$F_x = F_s^i \cos \gamma - F_n^i \sin \gamma; \quad F_y = F_s^i \sin \gamma + F_n^i \cos \gamma, \quad (10.41)$$

где $\gamma = \beta^i - \beta^j$.

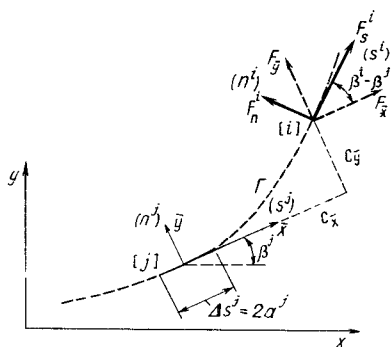


Рис. 10.5. Представление силы F_s^i (см. рис. 10.4) в местной системе координат

С использованием соотношений (10.38) и (10.39) можно записать выражения для смещений и напряжений, вызванных силами F_x, F_y , приложенными в точке $\bar{x}=c_x, \bar{y}=c_y$, т. е. в точке $[i]$. С этой целью в (10.37) – (10.40) x и y нужно заменить на $(\bar{x}-c_x)$ и $(\bar{y}-c_y)$ с соответствующими знаками, а координатные индексы x и y – на x и y . Смещения $u_s' = u_x, u_n' = u_y$ и напряжения $\sigma_s' = \tau_{xy}, \sigma_n' = \sigma_y$ на j -м отрезке (искомое контрольное решение) находят из полученных выражений, полагая в них $\bar{y}=0$, так как точка находится

на контуре. С учетом (10.41) получают смещения для контрольного решения:

$$\left. \begin{aligned}
u'_s &= \frac{F_s^i}{2G} \left[(3-4\nu) g \cos \gamma - \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} c_{\bar{y}} \sin \gamma \right] + \\
&+ \frac{F_n^i}{2G} \left[-(3-4\nu) g \sin \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} c_{\bar{y}} \cos \gamma \right]; \\
u'_n &= \frac{F_s^i}{2G} \left[(3-4\nu) g \sin \gamma - \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \sin \gamma \right] + \\
&+ \frac{F_n^i}{2G} \left[(3-4\nu) g \cos \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin \gamma + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \cos \gamma \right];
\end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma'_s &= F_s^i \left[(1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \sin \gamma + (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \cos \gamma - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos \gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \sin \gamma \right] + \\
&+ F_n^i \left[(1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \cos \gamma - (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \sin \gamma + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin \gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \cos \gamma \right]; \\
\sigma'_n &= F_s^i \left[2\nu \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \cos \gamma + 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \sin \gamma - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos \gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} c_{\bar{y}} \sin \gamma \right] + \\
&+ F_n^i \left[-2\nu \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \sin \gamma + 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \cos \gamma + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin \gamma + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} c_{\bar{y}} \cos \gamma \right],
\end{aligned} \right\} \quad (10.43)$$

где функция $g(\bar{x}, \bar{y})$ имеет вид (10.37), а ее производные в (10.42), (10.43) определяют при $\bar{y}=0$.

Выражения (10.42) и (10.43) дают два контрольных решения для каждого элемента i : для касательной F_s^i и для нормальной силы F_n^i . Коэффициенты влияния в (10.36) получают путем очередного выбора этих решений (т.е. $F_s^i \neq 0$, $F_n^i = 0$ и $F_s^i = 0$, $F_n^i \neq 0$), подстановки (10.42) и (10.43) в (10.34), (10.35) и выполнения интегрирования по $\bar{x}$ вдоль Δs^i в пределах от $-a^i$ до a^i . После выполнения указанных операций нет нужды в определении F_s^i и F_n^i , поскольку они входят как сомножители в обе части уравне-

ний. Следовательно, можно считать, что F_s^i и F_n^i равны $+1$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} B_{ss}^{ij} &= \int_{a'}^{-a'} u'_s(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} [(3-4\nu)T_1 \cos \gamma + c_{\bar{y}}(T_2 \sin \gamma - T_3 \cos \gamma)]; \\ B_{sn}^{ij} &= \int_{a'}^{-a'} u'_n(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} [(3-4\nu)T_1 \sin \gamma + c_{\bar{y}}(T_2 \cos \gamma + T_3 \sin \gamma)]; \\ B_{ns}^{ij} &= \int_{a'}^{+a'} u'_s(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} [-(3-4\nu)T_1 \sin \gamma + c_{\bar{y}}(T_2 \cos \gamma + T_3 \sin \gamma)]; \\ B_{nn}^{ij} &= \int_{-a'}^{-a'} u'_n(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} [(3-4\nu)T_1 \cos \gamma - c_{\bar{y}}(T_2 \sin \gamma - T_3 \cos \gamma)]; \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{ij} &= \int_{-a'}^{+a'} \sigma'_s(F_s^i) d\bar{x} = [(1-2\nu)T_2 \sin \gamma + 2(1-\nu)T_3 \cos \gamma + \\ &\quad + c_{\bar{y}}(T_4 \sin \gamma + T_5 \cos \gamma)]; \\ A_{sn}^{ij} &= \int_{-a'}^{+a'} \sigma'_n(F_s^i) d\bar{x} = [-(1-2\nu)T_2 \cos \gamma + 2(1-\nu)T_3 \sin \gamma + \\ &\quad + c_{\bar{y}}(T_4 \cos \gamma - T_5 \sin \gamma)]; \\ A_{ns}^{ij} &= \int_{-a'}^{+a'} \sigma'_s(F_n^i) d\bar{x} = [(1-2\nu)T_2 \cos \gamma - 2(1-\nu)T_3 \sin \gamma + \\ &\quad + c_{\bar{y}}(T_4 \cos \gamma - T_5 \sin \gamma)]; \\ A_{nn}^{ij} &= \int_{-a'}^{+a'} \sigma'_n(F_n^i) d\bar{x} = [(1-2\nu)T_2 \sin \gamma + 2(1-\nu)T_3 \cos \gamma - \\ &\quad - c_{\bar{y}}(T_4 \sin \gamma + T_5 \cos \gamma)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

В этих формулах величины $T_1, \dots, T_5$ представляют собой определенные интегралы от функции $g(\bar{x}, \bar{y})$ и ее производных (вычисленных при $\bar{y}=0$):

$$\left. \begin{aligned}
T_1 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[c_y \left(\operatorname{arctg} \frac{c_y}{c_x - a^j} - \operatorname{arctg} \frac{c_y}{c_x + a^j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (c_x - a^j) \ln \sqrt{(c_x - a^j)^2 + c_y^2} + (c_x + a^j) \ln \sqrt{(c_x + a^j)^2 + c_y^2} \right]; \\
T_2 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{(c_x - a^j)^2 + c_y^2} - \ln \sqrt{(c_x + a^j)^2 + c_y^2} \right]; \\
T_3 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\operatorname{arctg} \frac{c_y}{c_x - a^j} - \operatorname{arctg} \frac{c_y}{c_x + a^j} \right]; \\
T_4 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{c_y}{(c_x - a^j)^2 + c_y^2} - \frac{c_y}{(c_x + a^j)^2 + c_y^2} \right]; \\
T_5 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{c_x - a^j}{(c_x - a^j)^2 + c_y^2} - \frac{c_x + a^j}{(c_x + a^j)^2 + c_y^2} \right].
\end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

Выше предполагалось, что точки $[i]$ и $[j]$ на рис. 10.5 не совпадают, т. е. величины c_x и c_y одновременно в нуль не обращаются. Однако равенства (10.44) с учетом (10.46) приемлемы и в случае совпадения точек, если при вычислении многозначной функции арктангенса использовать обычную процедуру предельного перехода. Полагая $c_x = 0$ и переходя к пределу при c_y , стремящемуся к нулю со стороны положительных значений y (т. е. извне области Ω), можно найти, что в (10.46) отличны от нуля только величины T_1 , T_3 и T_5 :

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\frac{a_j \ln a^j}{2\pi(1-\nu)} = -\frac{a^i \ln a^i}{2\pi(1-\nu)}; \quad T_3 = \frac{1}{4(1-\nu)}; \\
T_5 &= -(2\pi a^j(1-\nu))^{-1} = -(2\pi a^i(1-\nu))^{-1}.
\end{aligned}$$

Эти значения получены при $c_x = 0$, $c_y = 0_+$.

Коэффициенты влияния, отражающие собственные воздействия элементов, по формулам (10.44) и (10.45) с учетом того, что $\gamma = \beta^i - \beta^j = 0$, получаются следующими:

$$\begin{aligned}
B_{sn}^{ii} &= B_{ns}^{ii} = 0; \quad B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = -\frac{3-4\nu}{4\pi G(1-\nu)} a^i \ln a^i; \\
A_{sn}^{ii} &= A_{ns}^{ii} = 0; \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = 1/2.
\end{aligned}$$

10.3.3. Определение усилий и смещений внутри области

Приведенные выше формулы дают усилия и смещения на границе Γ произвольной области Ω . Если же нужно найти решение внутри рассматриваемой области Ω , можно воспользоваться интегральными тождествами, известными как формулы Соммильяны. Для плоской деформации эти формулы дают смещения внутренней

точки p области Ω

$$\left. \begin{aligned} u_{x(p)} &= - \int_{\Gamma} [u_s \sigma'_s(F_x) + u_n \sigma'_n(F_x)] ds + \\ &+ \int_{\Gamma} [\sigma_s u'_s(F_x) + \sigma_n u'_n(F_x)] ds; \\ u_{y(p)} &= - \int_{\Gamma} [u_s \sigma'_s(F_y) + u_n \sigma'_n(F_y)] ds + \\ &+ \int_{\Gamma} [\sigma_s u'_s(F_y) + \sigma_n u'_n(F_y)] ds, \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

где $u_s, u_n, \sigma_s, \sigma_n$ — граничные смещения и напряжения для задачи, решение которой имеется; $u'_s(F_i), u'_n(F_i), \sigma'_s(F_i), \sigma'_n(F_i)$ — касательные и нормальные смещения и напряжения на границе Γ , вызванные действием силы $F_i = (F_x, F_y) = (+1, +1)$, приложенной в точке p . Сила действует не на контуре, а внутри области Ω .

Уравнения (10.47) можно решить численно, разбивая границу Γ на N элементов и предполагая, как и ранее, что u_s, u_n, σ_s и σ_n постоянны в пределах каждого элемента:

$$\left. \begin{aligned} u_{x(p)} &= - \sum_{j=1}^N [u_s^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_s(F_x) ds + u_n^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_n(F_x) ds] + \\ &+ \sum_{j=1}^N [\sigma_s^j \int_{\Delta s^j} u'_s(F_x) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} u'_n(F_x) ds]; \\ u_{y(p)} &= - \sum_{j=1}^N [u_s^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_s(F_y) ds + u_n^j \int_{\Delta s^j} \sigma'_n(F_y) ds] + \\ &+ \sum_{j=1}^N [\sigma_s^j \int_{\Delta s^j} u'_s(F_y) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} u'_n(F_y) ds], \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

где все граничные параметры u_s^j, u_n^j, σ_s^j и σ_n^j известны. Интегралы в (10.48) являются коэффициентами, которые необходимо вычислить для каждой точки p , где отыскиваются значения смещений $u_{x(p)}$ и $u_{y(p)}$. Их вычисляют в локальной системе координат $\bar{x}, \bar{y}$ с началом в центре j -го элемента, как показано на рис. 10.6.

Точка p — произвольная с координатами $\bar{x} = c_x, \bar{y} = c_y$, не лежащая на границе Γ .

Величины со штрихами в (10.47) представляют смещения $u'_s = u_x, u'_n = u_y$ и напряжения $\sigma'_s = \tau_{xy}, \sigma'_n = \sigma_y$ в j -м граничном элементе при действии сил $F_x = +1$ и $F_y = +1$, приложенных в точке p . Выражения для этих величин можно получить непосредственно из (10.42) и (10.43), полагая $\gamma = -\beta^j$, т. е. $\beta^j = 0$, и $F_s^j = F_x, F_n^j = F_y$. В (10.48) необходимые интегралы находят, как и ранее, путем рассмотрения отдельно случаев $F_x = +1, F_y = 0$ и $F_x = 0, F_y = +1$. В итоге уравнения (10.48) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 u_{x(p)} = & \sum_{j=1}^N [(1-2\nu)T_2 \sin \beta^j - 2(1-\nu)T_3 \cos \beta^j + c_y(T_4 \sin \beta^j - \\
 & - T_5 \cos \beta^j)] u_s^j + \sum_{j=1}^N [(1-2\nu)T_2 \cos \beta^j + 2(1-\nu)T_3 \sin \beta^j - \\
 & - c_y(T_4 \cos \beta^j + T_5 \sin \beta^j)] u_n^j + \sum_{j=1}^N [(3-4\nu)T_1 \cos \beta^j - \\
 & - c_y(T_2 \sin \beta^j + T_3 \cos \beta^j)] \frac{\sigma_s^j}{2G} + \sum_{j=1}^N [-(3-4\nu)T_1 \sin \beta^j + \\
 & + c_y(T_2 \cos \beta^j - T_3 \sin \beta^j)] \frac{\sigma_n^j}{2G}; \\
 u_{y(p)} = & \sum_{j=1}^N [-(1-2\nu)T_2 \cos \beta^j - 2(1-\nu)T_3 \sin \beta^j - c_y(T_4 \cos \beta^j + \\
 & + T_5 \sin \beta^j)] u_s^j + \sum_{j=1}^N [(1-2\nu)T_2 \sin \beta^j - 2(1-\nu)T_3 \cos \beta^j - \\
 & - c_y(T_4 \sin \beta^j - T_5 \cos \beta^j)] u_n^j + \sum_{j=1}^N [(3-4\nu)T_1 \sin \beta^j + \\
 & + c_y(T_2 \cos \beta^j - T_3 \sin \beta^j)] \frac{\sigma_s^j}{2G} + \sum_{j=1}^N [(3-4\nu)T_1 \cos \beta^j + \\
 & + c_y(T_2 \sin \beta^j + T_3 \cos \beta^j)] \frac{\sigma_n^j}{2G},
 \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

где T_1 и другие коэффициенты определяются по (10.46).

Формулы для напряжений в точке p получают, определив деформации, отвечающие смещениям (10.49), и используя обобщенный закон Гука для случая плоской деформации:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x = & 2G \left[e_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_x + e_y) \right]; \\
 \sigma_y = & 2G \left[e_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_x + e_y) \right]; \\
 \sigma_z = & 2G \frac{\nu}{1-2\nu} (e_x + e_y); \\
 \tau_{xy} = & 2G e_{xy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

Деформации определяются соотношениями:

$$e_{x(p)} = \frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_x}; \quad e_{y(p)} = \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_y};$$

$$e_{xy(p)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_y} + \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_x} \right], \quad (10.51)$$

где c_x и c_y — компоненты вектора, соединяющего центр j -го граничного элемента с точкой p (см. рис. 10.6). Используя формулы преобразований координат $c_x = c_x \cos \beta^j + c_y \sin \beta^j$, $c_y = -c_x \sin \beta^j + c_y \cos \beta^j$, находят по цепному правилу частного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial c_x} = \frac{\partial c_x}{\partial c_x} \frac{\partial}{\partial c_x} + \frac{\partial c_y}{\partial c_x} \frac{\partial}{\partial c_y} = \cos \beta^j \frac{\partial}{\partial c_x} - \sin \beta^j \frac{\partial}{\partial c_y},$$

$$\frac{\partial}{\partial c_y} = \frac{\partial c_x}{\partial c_y} \frac{\partial}{\partial c_x} + \frac{\partial c_y}{\partial c_y} \frac{\partial}{\partial c_y} = \sin \beta^j \frac{\partial}{\partial c_x} + \cos \beta^j \frac{\partial}{\partial c_y}.$$

Деформации (10.51):

$$\left. \begin{aligned} e_{x(p)} &= \frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_x} \cos \beta^j - \frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_y} \sin \beta^j; \\ e_{y(p)} &= \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_x} \sin \beta^j + \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_y} \cos \beta^j; \\ e_{xy(p)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_x} \sin \beta^j + \frac{\partial u_{x(p)}}{\partial c_y} \cos \beta^j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_x} \cos \beta^j - \frac{\partial u_{y(p)}}{\partial c_y} \sin \beta^j \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

Подставляя (10.49) в (10.52) и используя затем (10.50), находят формулы для напряжений:

$$\sigma_{x(p)} = 2G \sum_{j=1}^N [2T_4 \cos^2 \beta^j + T_5 \sin 2\beta^j - c_y (T_6 \sin 2\beta^j -$$

$$- T_7 \sin 2\beta^j)] u_s^j + 2G \sum_{j=1}^N [-T_5 - c_y (T_6 \sin 2\beta^j +$$

$$+ T_7 \cos 2\beta^j)] u_n^j + \sum_{j=1}^N [-T_2 - 2(1-\nu)(T_2 \cos 2\beta^j - T_3 \sin 2\beta^j) +$$

$$+ c_y (T_4 \cos 2\beta^j + T_5 \sin 2\beta^j)] \sigma_s^j + \sum_{j=1}^N [-T_3 + (1-2\nu)(T_2 \sin 2\beta^j +$$

$$+ T_3 \cos 2\beta^j) + c_y (T_4 \sin 2\beta^j - T_5 \cos 2\beta^j)] \sigma_n^j;$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y(p)} = & 2G \sum_{j=1}^N [2T_4 \sin^2 \beta^j - T_5 \sin 2\beta^j + c_y (T_6 \cos 2\beta^j - \\
& - T_7 \sin 2\beta^j)] u_s^j + 2G \sum_{j=1}^N [-T_5 + c_y (T_6 \sin 2\beta^j + \\
& + T_7 \cos 2\beta^j)] u_n^j + \sum_{j=1}^N [-T_2 + 2(1-\nu) (T_2 \cos 2\beta^j - \\
& - T_3 \sin 2\beta^j) - c_y (T_4 \cos 2\beta^j + T_5 \sin 2\beta^j)] \sigma_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N [-T_3 - (1-2\nu) (T_2 \sin 2\beta^j + T_3 \cos 2\beta^j) - \\
& - c_y (T_4 \sin 2\beta^j - T_5 \cos 2\beta^j)] \sigma_n^j; \\
\tau_{xy(p)} = & 2G \sum_{j=1}^N [T_4 \sin 2\beta^j - T_5 \cos 2\beta^j - c_y (T_6 \sin 2\beta^j + \\
& + T_7 \sin 2\beta^j)] u_s^j + 2G \sum_{j=1}^N [c_y (T_6 \cos 2\beta^j - T_7 \sin 2\beta^j)] u_n^j + \\
& + \sum_{j=1}^N [-2(1-\nu) (T_2 \sin 2\beta^j + T_3 \cos 2\beta^j) + \\
& + c_y (T_4 \sin 2\beta^j - T_5 \cos 2\beta^j)] \sigma_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N [-(1-2\nu) (T_2 \cos 2\beta^j - T_3 \sin 2\beta^j) - \\
& - c_y (T_4 \cos 2\beta^j + T_5 \sin 2\beta^j)] \sigma_n^j.
\end{aligned}$$

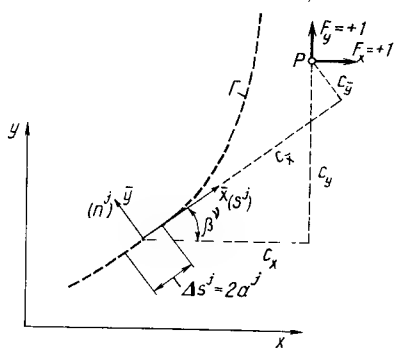


Рис. 10.6. К определению усилий внутри области Γ (см. рис. 10.4, 10.5)

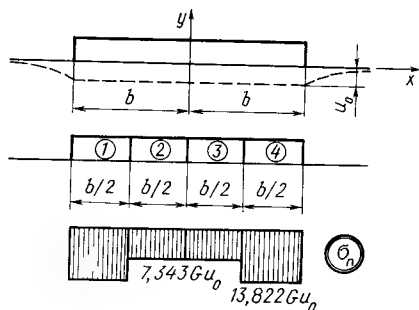


Рис. 10.7. Вдавливание жесткого штампа в упругую среду, ограниченную плоскостью

В этих выражениях функции $T_1, \dots, T_5$ даются формулами (10.46), а функции T_6 и T_7 выражениями

$$T_6 = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(c_x - a^j)^2 - c_y^2}{[(c_x - a^j)^2 + c_y^2]^2} - \frac{(c_x + a^j)^2 - c_y^2}{[(c_x + a^j)^2 + c_y^2]^2} \right\};$$

$$T_7 = - \frac{2c_y}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{c_x - a^j}{[(c_x - a^j)^2 + c_y^2]^2} - \frac{c_x + a^j}{[(c_x + a^j)^2 + c_y^2]^2} \right\}.$$

Пример 10.3. Определить напряжения в упругом полупространстве под жестким штампом, вдавливаемым со смазки [47].

Поделим границу штампа на четыре элемента и учтем симметрию, т. е. составим уравнения (10.36) только для элементов 3 и 4 (рис. 10.7):

$$\begin{aligned} B_{ss}^{(31)} \sigma_s^{(1)} + B_{ss}^{(32)} \sigma_s^{(2)} + B_{ss}^{(33)} \sigma_s^{(3)} + B_{ss}^{(34)} \sigma_s^{(4)} + B_{sn}^{(31)} \sigma_n^{(1)} + B_{sn}^{(32)} \sigma_n^{(2)} + \\ + B_{sn}^{(33)} \sigma_n^{(3)} + B_{sn}^{(34)} \sigma_n^{(4)} = A_{ss}^{(31)} u_s^{(1)} + A_{ss}^{(32)} u_s^{(2)} + A_{ss}^{(33)} u_s^{(3)} + A_{ss}^{(34)} u_s^{(4)} + \\ + A_{sn}^{(31)} u_n^{(1)} + A_{sn}^{(32)} u_n^{(2)} + A_{sn}^{(33)} u_n^{(3)} + A_{sn}^{(34)} u_n^{(4)}, \\ B_{ns}^{(31)} \sigma_s^{(1)} + B_{ns}^{(32)} \sigma_s^{(2)} + B_{ns}^{(33)} \sigma_s^{(3)} + B_{ns}^{(34)} \sigma_s^{(4)} + B_{nn}^{(31)} \sigma_n^{(1)} + B_{nn}^{(32)} \sigma_n^{(2)} + \\ + B_{nn}^{(33)} \sigma_n^{(3)} + B_{nn}^{(34)} \sigma_n^{(4)} = A_{ns}^{(31)} u_s^{(1)} + A_{ns}^{(32)} u_s^{(2)} + A_{ns}^{(33)} u_s^{(3)} + A_{ns}^{(34)} u_s^{(4)} + \\ + A_{nn}^{(31)} u_n^{(1)} + A_{nn}^{(32)} u_n^{(2)} + A_{nn}^{(33)} u_n^{(3)} + A_{nn}^{(34)} u_n^{(4)}. \end{aligned}$$

Эти уравнения составлены для сил $F_s=1$ и $F_n=1$, приложенных в середине элемента 3. Такие же уравнения составляем для сил, приложенных к середине элемента 4:

$$\begin{aligned} B_{ss}^{(41)} \sigma_s^{(1)} + B_{ss}^{(42)} \sigma_s^{(2)} + B_{ss}^{(43)} \sigma_s^{(3)} + B_{ss}^{(44)} \sigma_s^{(4)} + B_{sn}^{(41)} \sigma_n^{(1)} + B_{sn}^{(42)} \sigma_n^{(2)} + \\ + B_{sn}^{(43)} \sigma_n^{(3)} + B_{sn}^{(44)} \sigma_n^{(4)} = A_{ss}^{(41)} u_s^{(1)} + A_{ss}^{(42)} u_s^{(2)} + A_{ss}^{(43)} u_s^{(3)} + A_{ss}^{(44)} u_s^{(4)} + \\ + A_{sn}^{(41)} u_n^{(1)} + A_{sn}^{(42)} u_n^{(2)} + A_{sn}^{(43)} u_n^{(3)} + A_{sn}^{(44)} u_n^{(4)}, \\ B_{ns}^{(41)} \sigma_s^{(1)} + B_{ns}^{(42)} \sigma_s^{(2)} + B_{ns}^{(43)} \sigma_s^{(3)} + B_{ns}^{(44)} \sigma_s^{(4)} + B_{nn}^{(41)} \sigma_n^{(1)} + B_{nn}^{(42)} \sigma_n^{(2)} + \\ + B_{nn}^{(43)} \sigma_n^{(3)} + B_{nn}^{(44)} \sigma_n^{(4)} = A_{ns}^{(41)} u_s^{(1)} + A_{ns}^{(42)} u_s^{(2)} + A_{ns}^{(43)} u_s^{(3)} + A_{ns}^{(44)} u_s^{(4)} + \\ + A_{nn}^{(41)} u_n^{(1)} + A_{nn}^{(42)} u_n^{(2)} + A_{nn}^{(43)} u_n^{(3)} + A_{nn}^{(44)} u_n^{(4)}. \end{aligned}$$

В приведенных четырех уравнениях восемь неизвестных. Но в соответствии с симметрией задачи: $\sigma_s^{(1)} = -\sigma_s^{(4)}$, $u_s^{(1)} = -u_s^{(4)}$, $\sigma_s^{(2)} = -\sigma_s^{(3)}$, $u_s^{(2)} = -u_s^{(3)}$, $\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(4)}$, $u_n^{(1)} = u_n^{(4)}$, $\sigma_n^{(2)} = \sigma_n^{(3)}$, $u_n^{(2)} = u_n^{(3)}$. Прежде чем выполнить операцию приведения подобных членов, учтем граничные условия. Из-за наличия смазки $\sigma_s^{(1)} = \sigma_s^{(2)} = \sigma_s^{(3)} = \sigma_s^{(4)} = 0$. Так как штамп жесткий, $u_n^{(1)} = u_n^{(2)} = u_n^{(3)} = u_n^{(4)} = -u_0$. В результате остается четыре неизвестных ($\sigma_n^{(1)}$, $\sigma_n^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $u_s^{(4)}$) и система четырех уравнений

$$\left. \begin{aligned} (B_{sn}^{(31)} + B_{sn}^{(34)}) \sigma_n^{(4)} + (B_{sn}^{(32)} + B_{sn}^{(33)}) \sigma_n^{(3)} - (A_{ss}^{(34)} - A_{ss}^{(31)}) u_s^{(4)} - \\ - (A_{ss}^{(33)} - A_{ss}^{(32)}) u_s^{(3)} = - (A_{sn}^{(31)} + A_{sn}^{(32)} + A_{sn}^{(33)} + A_{sn}^{(34)}) u_0; \\ (B_{nn}^{(31)} + B_{nn}^{(34)}) \sigma_n^{(4)} + (B_{nn}^{(32)} + B_{nn}^{(33)}) \sigma_n^{(3)} - (A_{ns}^{(34)} - A_{ns}^{(31)}) u_s^{(4)} - \\ - (A_{ns}^{(33)} - A_{ns}^{(32)}) u_s^{(3)} = - (A_{nn}^{(31)} + A_{nn}^{(32)} + A_{nn}^{(33)} + A_{nn}^{(34)}) u_0; \\ (B_{sn}^{(41)} + B_{sn}^{(44)}) \sigma_n^{(4)} + (B_{sn}^{(42)} + B_{sn}^{(43)}) \sigma_n^{(3)} - (A_{ss}^{(44)} - A_{ss}^{(41)}) u_s^{(4)} - \\ - (A_{ss}^{(43)} - A_{ss}^{(42)}) u_s^{(3)} = - (A_{sn}^{(41)} + A_{sn}^{(42)} + A_{sn}^{(43)} + A_{sn}^{(44)}) u_0; \\ (B_{nn}^{(41)} + B_{nn}^{(44)}) \sigma_n^{(4)} + (B_{nn}^{(42)} + B_{nn}^{(43)}) \sigma_n^{(3)} - (A_{ns}^{(44)} - A_{ns}^{(41)}) u_s^{(4)} - \\ - (A_{ns}^{(43)} - A_{ns}^{(42)}) u_s^{(3)} = - (A_{nn}^{(41)} + A_{nn}^{(42)} + A_{nn}^{(43)} + A_{nn}^{(44)}) u_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

Табл. 10.1. Значения координаты c_x

i	j	c_x	i	j	c_x
3	1	b	4	1	$3b/2$
3	2	$b/2$	4	2	b
3	3	0	4	3	$b/2$
3	4	$-b/2$	4	4	0

По формулам (10.44) и (10.45) определяем числовые значения коэффициентов с учетом (10.46). Для всех элементов $a^1 = b/4$, $c_y = 0$, $\gamma = 0$, коэффициент поперечной деформации $\nu = 0,25$, $b = 1$. Отличие будет лишь в величинах c_x , значения которых приведены в табл. 10.1.

Система уравнений (10.53) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} -0,5u_s^{(3)} &= 0,0271u_0; \\ -0,5u_s^{(4)} &= 0,1032u_0; \\ (-0,0664/G)\sigma_n^{(4)} + (0,0597/G)\sigma_n^{(3)} + 0,0854u_s^{(4)} + 0,0583u_s^{(3)} &= -0,5u_0; \\ (-7,7 \cdot 10^{-4}/G)\sigma_n^{(4)} - (0,0664/G)\sigma_n^{(3)} + 0,0179u_s^{(4)} - 0,0312u_s^{(3)} &= -0,5u_0. \end{aligned} \right\}$$

Результаты решения: $u_s^{(3)} = -0,0542u_0$; $u_s^{(4)} = -0,2064u_0$; $\sigma_n^{(3)} = 7,3432Gu_0$; $\sigma_n^{(4)} = 13,8221Gu_0$.

На рис. 10.7 изображена эпюра давления. Результат получился весьма приближенным, но качественно он отражает существо явления. Для большего числа элементов задача решена в [47].

С помощью найденных значений можно определить перемещения и напряжения внутри области по формулам (10.50) и (10.53).

С вычислительной точки зрения более эффективными в ряде случаев могут оказаться другие варианты метода граничных элементов: метод фиктивных нагрузок, метод разрывных смещений [47]. Однако в любом случае при решении этой или иной задачи необходимо иметь ее фундаментальное решение типа (10.37).

Следует также иметь в виду, что если методом конечных элементов можно решить некоторые задачи строительной механики с достаточной точностью без применения вычислительной техники, то метод граничных элементов полностью ориентирован на использование ЭВМ.

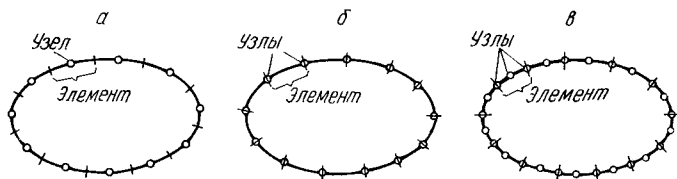


Рис. 10.8. Граничные элементы:

a — постоянный, $б$ — линейный, $в$ — квадратичный

В рассмотренной задаче использованы элементы с постоянными напряжениями и деформациями. Однако, как и в методе конечных

элементов, с целью повышения точности расчета при меньшем количестве граничных элементов их можно представить более сложными [9]. На рис. 10.8, *а* показан элемент, по длине которого напряжения и деформации постоянны, на рис. 10.8, *б* — линейный элемент, для которого изменение напряжений и перемещений между узлами принимается линейным, на рис. 10.8, *в* — квадратичный элемент, для которого граничные условия по его длине аппроксимируются квадратной параболой. Порядок аппроксимации может быть и выше [2].

11. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В задачах строительной механики, относящихся к расчету тонких пластин, оболочек и других конструкций, допускающих большие перемещения, применяются соотношения геометрически нелинейной теории, что приводит к необходимости решения нелинейных уравнений. Другим источником появления нелинейных членов в дифференциальных уравнениях расчета объектов строительной механики является использование нелинейных зависимостей между деформациями и напряжениями.

Для решения нелинейных задач строительной механики в большинстве случаев можно применять численные методы, описанные в гл. 4—8 (метод конечных разностей, МКЭ, метод Бубнова — Галеркина, вариационные методы). Применение этих методов приводит к системам нелинейных алгебраических уравнений. При решении таких систем могут возникнуть трудности, связанные с ветвлением решения и с выбором начального приближения. Поэтому для решения нелинейных задач разработаны специальные методы линеаризации, которые сводят решение нелинейных задач к последовательному решению линейных задач.

11.1. МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

11.1.1. Метод Ньютона — Канторовича решения операторных уравнений

Рассмотрим уравнение [64]

$$F(x) = 0, \quad (11.1)$$

где F — дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, действующий из некоторого множества E_1 в E_2 .

Метод построения последовательных приближений x_n к решению x^* (если оно существует) уравнения (11.1) основан на последовательной линеаризации последнего.

Если приближение x_n найдено, для отыскания последующего приближения x_{n+1} уравнение (11.1) заменяется линеаризованным в точке x_n уравнением

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

Если определен действующий из E_2 в E_1 линейный оператор $[F'(x_n)]^{-1}$, то

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n). \quad (11.2)$$

Определяемый формулой (11.2) метод последовательных приближений называется методом Ньютона — Канторовича.

Последовательные приближения (11.2) сходятся к x^* , если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к x^* .

Недостаток метода (11.2) заключается в том, что при его применении требуется на каждом шаге решать линейное уравнение со своим линейным оператором $F'(x_n)$:

$$F'(x_n)\Delta x_n + F(x_n) = 0, \quad (11.3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n.$$

Пример 11.1. Используя метод Ньютона — Канторовича, найти решение нелинейного дифференциального уравнения $(3-y)y' + 4 = 0$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Для формирования уравнения (11.3) необходимо построить дифференциал Фреше $F'(y)\Delta y$. В нашем случае $F(y) = (3-y)y' + 4$. Тогда

$$F(y + \Delta y) = (3 - y - \Delta y)(y' + \Delta y') + 4$$

и приращение ΔF имеет вид

$$F(y + \Delta y) - F(y) = (3 - y)y' + (3 - y)\Delta y' - \Delta y y' -$$

$$- \Delta y \Delta y' + 4 - (3 - y)y' - 4 = (3 - y)\Delta y' - \Delta y y' - \Delta y \Delta y'.$$

Отбрасывая члены, содержащие Δy в степени выше первой, получим $F'(y)\Delta y = (3 - y)\Delta y' - \Delta y y'$. Таким образом, уравнение (11.3) получает вид

$$-y'\Delta y_i + (3 - y_i)\Delta y'_i + (3 - y_i)y'_i + 4 = 0. \quad (11.4)$$

Начальное условие для Δy_i остается таким же, как и для y . За начальное приближение примем $y_0 = 0$, тогда $y'_0 = 0$. Следовательно, уравнение (11.4) на первом этапе $3\Delta y'_0 + 4 = 0$. Решая это уравнение при условии $\Delta y_0(0) = 0$, находим $\Delta y_0 = -4x/3$. Следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -4x/3$. Теперь $y'_1 = -4/3$ и уравнение (11.4) на втором этапе

$$\frac{4}{3}\Delta y_1 + \left(3 + \frac{4}{3}x\right)\Delta y'_1 + \left(3 + \frac{4}{3}x\right)\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = 0.$$

Решая это линейное относительно Δy_1 уравнение, находим $\Delta y_1 = (8x^2/9)/(3 + 4x/3)$.

Следовательно, $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -4x/3 + (8x^2/9)/(3 + 4x/3)$. На этом процесс прекращаем, так как получено приближенное решение $y(x) \approx y_2(x)$, близкое к точному (см. табл. 11.1) $y(x) = 3 - \sqrt{9 + 8x}$.

11.1.2. Модифицированный метод Ньютона — Канторовича

Наиболее часто вместо уравнения (11.3) применяется

$$F(x_n) + F'(x_0)\Delta x_n = 0, \quad (11.5)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n,$$

где x_0 — начальное приближение. Последовательные приближения определяются рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1}F(x_n). \quad (11.6)$$

Метод, описываемый формулой (11.6), называют модифицированным методом Ньютона — Канторовича приближенного решения уравнения (11.1).

Для решения линеаризованных уравнений (11.3) или (11.5) можно применять любые методы, рассмотренные в гл. 4—8.

11.2. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

11.2.1. Основные положения метода продолжения по параметру

Рассматривается уравнение [64]

$$F(\lambda, x) = 0. \quad (11.7)$$

Предполагается, что известны λ_0 и x_0 , удовлетворяющие уравнению (11.7). Находят решение $x(\lambda)$, близкое к x_0 при значении λ , близком к λ_0 (λ — некоторый параметр).

Если существует единственное близкое к x_0 решение $x(\lambda)$, уравнение (11.7) определяет однозначную неявную функцию. Если $x(\lambda)$ определяется неоднозначно, имеет место ветвление решений.

Если предположить, что оператор $F(\lambda, x)$ дифференцируем по x и λ , т. е. существует действующий из пространства E_1 в E_2 линейный оператор $F'_x(\lambda, x)$ и элемент этого пространства $F'_\lambda(\lambda, x) \in E_2$ (индексы x и λ означают дифференцирование по соответствующей переменной), неявную функцию $x(\lambda)$ можно искать из дифференциального уравнения

$$F'_x(\lambda, x) \frac{dx}{d\lambda} + F'_\lambda(\lambda, x) = 0, \quad (11.8)$$

которое нужно решать при начальном условии

$$x(\lambda_0) = x_0. \quad (11.9)$$

Для решения начальной задачи (11.8), (11.9) можно применять метод Эйлера, метод Рунге — Кутты и др. (см. гл. 4). Из точки (λ_0, x_0) решение продолжается по параметру λ . Существует несколько разновидностей метода продолжения по параметру, зависящих от физического смысла выбранного параметра.

11.2.2. Метод последовательных нагружений

Метод последовательных нагружений разработан В. В. Петровым для решения нелинейных уравнений пластин и оболочек, которые кратко можно записать так [59]:

$$F(U, H) = 0, \quad (11.10)$$

где H — параметр нагрузки, U — вектор перемещений.

Метод продолжения по параметру нагрузки H для нахождения $U(H)$ в простейшем случае приводит на каждом этапе нагружения (ΔH) к решению линейного относительно ΔU уравнения

$$F'_U(U, H)\Delta U + F'_H(U, H)\Delta H = 0. \quad (11.11)$$

В (11.11) начальным условием для функции $U(H)$ является $U(0)=0$, так как в начальном ненагруженном состоянии оболочки перемещения равны нулю.

Итак, процесс нахождения $U(H)$ при различных значениях H можно записать в виде $U_{n+1}=U_n+\Delta U_n$, где ΔU_n — решение уравнения

$$F'_U(U_n, H_n)\Delta U_n + F'_H(U_n, H_n)\Delta H_n = 0, \quad (11.12)$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta H_k, \quad H_0=0, \quad U_0=0.$$

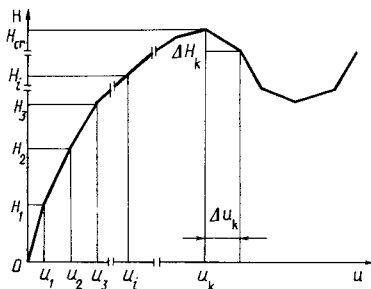


Рис. 11.1. Зависимость «нагрузка—прогиб оболочки», полученная методом последовательных нагружений

Метод последовательных нагружений — это шаговый метод. Решения находят не в виде кривой, а в виде ломаной (рис. 11.1), так как на каждом этапе нагружений решают линейную задачу (11.12).

Если U — перемещение точек срединной поверхности пластин и оболочек (например, прогиб), расчет

по параметру H возможен только до критического значения $H=H_{кр}$. При подходе к $H_{кр}$ за параметр нужно выбрать U и, решая уравнение (11.12) при заданном значении ΔU_n , находить ΔH_n , т.е. в процессе решения задачи возможны изменения параметра (см. § 11.3.1). При этом $U_{n+1}=U_n+\Delta U_n$, $H_{n+1}=H_n+\Delta H_n$.

Рассмотренные здесь нелинейные уравнения (11.1), (11.7), (11.10) можно вначале свести (например, методом Бубнова — Галеркина) к нелинейным алгебраическим уравнениям и решать их изложенными в гл. 2 методами. Однако в этом случае необходимо иметь достаточно близкое к точному начальное приближение. Достоинство же метода последовательных нагружений заключается в том, что начальное приближение не нужно. Начиная с исходного ненагруженного состояния конструкции, строят решение, непрерывно зависящее от нагрузки.

Нахождение приращений ΔU_n или ΔH_n на n -м этапе по схеме (11.12) имеет порядок точности $O(\Delta H^2)$. Существуют модификации метода последовательных нагружений [39] более высокого порядка точности.

Например, схема с порядком точности $O(\Delta H^3)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} F'_U(U_n, H_n)\Delta U_n + F'_H(U_n, H_n)\Delta H_n &= 0; \\ F'_U(U_n + \Delta U_n/2, H_n + \Delta H_n/2)\Delta \bar{U}_n + F'_H(U_n + \\ &+ \Delta U_n/2, H_n + \Delta H_n/2)\Delta \bar{H}_n = 0; \\ U_{n+1} &= U_n + \Delta \bar{U}_n, \quad H_{n+1} = H_n + \Delta \bar{H}_n. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Табл. 11.1. Результаты решения уравнения (11.15), полученные разными методами

x	y(x)				
	1	2	3	4	5
0,25	-0,324	-0,316	-0,317	-0,317	-0,317
0,5	-0,630	-0,600	-0,604	-0,606	-0,606
1,0	-1,211	-1,090	-1,107	-1,128	-1,123

Можно построить и схему, имеющую порядок точности $O(\Delta H^5)$:

$$\left. \begin{aligned} F'_U(U_n, H_n) K_1 + F'_H(U_n, H_n) \Delta H_n &= 0; \\ F'_U(U_n + K_1/2, H_n + \Delta H_n/2) K_2 + F'_H(U_n + K_1/2, H_n + \\ &+ \Delta H_n/2) \Delta H_n = 0; \\ F'_U(U_n + K_2/2, H_n + \Delta H_n/2) K_3 + F'_H(U_n + K_2/2, H_n + \Delta H_n/2) \Delta H_n &= 0; \\ F'_U(U_n + K_3, H_n + \Delta H_n) K_4 + F'_H(U_n + K_3, H_n + \Delta H_n) \Delta H_n &= 0; \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); H_{n+1} = H_n + \Delta H_n. \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

В (11.13) и (11.14) необходимо решать уравнения той же структуры, что и в (11.12), только с другими коэффициентами, так что использование схем (11.13) и (11.14) не вызывает принципиальных затруднений.

Пример 11.2. Методом последовательных нагружений найти решение нелинейного уравнения (см. пример 11.1)

$$(3-y)y' + H = 0 \quad (11.15)$$

при значении параметра $H=4$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$.

Уравнение (11.12) в нашем случае имеет вид

$$(3-y_i) \Delta y'_i - y'_i \Delta y_i = -h. \quad (11.16)$$

Здесь h — шаг по H , примем $h=+2$.

Начальное условие для Δy_i остается тем же, что и для y : $\Delta y_i(0)=0$. При $H_0=0$ решение исходного уравнения будет $y_0=0$ ($y'_0=0$), поэтому на первом этапе нагружения уравнение (11.16) примет вид $3\Delta y'_0 = -2$. Решая это уравнение, находим $\Delta y_0 = -2x/3$. Следовательно, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -2x/3$, $y'_1 = -2/3$, $H_1 = H_0 + h = 2$.

На втором этапе нагружения уравнение (11.16) принимает вид

$$\left(3 + \frac{2}{3}x\right) \Delta y'_1 + \frac{2}{3} \Delta y_1 = -2,$$

откуда $\Delta y_1 = -2x/(3+2x/3)$.

Следовательно, $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -2x/3 - 2x/(3+2x/3)$, $H_2 = H_1 + h = 4$. За приближенное решение исходного уравнения принимаем $y(x) \approx y_2(x)$.

В табл. 11.1 приведены результаты решения уравнения (11.15), полученные при некоторых значениях x различными методами.

В графе 1 приведены значения $y(x)$, полученные по схеме (11.12) с шагом $h=2$; в графе 2 — по схеме (11.13) с шагом $h=4$; в графе 3 — по схеме (11.14)

с шагом $h=4$; в графе 4 — полученное методом Ньютона — Канторовича (см. пример 11.1); в графе 5 — точное решение.

Пример 11.3. Показать эффективность модификации метода последовательных нагружений второго порядка точности (11.13) на примере расчета квадратных в плане пологих оболочек.

Пусть оболочка шарнирно-неподвижно закреплена по контуру и нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой интенсивности q .

Уравнения равновесия таких оболочек приняты в виде (7.12). Выраженные через перемещения точек срединной поверхности, они в безразмерной форме принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla_1 \bar{U} + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} (\nabla_1 \bar{W} - k_1) + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} &= 0; \\ \mu_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi \partial \eta} + \nabla_2 \bar{V} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} (\nabla_2 \bar{W} - k_2) + \mu_2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} &= 0; \\ 12 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} (\nabla_3 \bar{W} - k_1) + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^2 k_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \\ + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} + 12 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} \nabla_4 \bar{W} - \\ - \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^4} - 2 \lambda^2 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \eta^4} - 12 (k_\xi k_1 + \lambda^2 k_\eta k_2) \bar{W} + \\ + 6 \lambda^2 k_2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right)^2 + 6 k_1 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right)^2 - 12 \bar{W} \nabla_5 \bar{W} + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \\ + 6 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right)^2 \nabla_3 \bar{W} + 6 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right)^2 \nabla_4 \bar{W} + 12 (1 - \nu^2) \bar{P} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad \nabla_2 = \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \\ \nabla_3 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad \nabla_4 = \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \\ \nabla_5 &= k_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 k_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \quad k_1 = k_\xi + \nu \lambda^2 k_\eta; \\ k_2 &= \nu k_\xi + \lambda^2 k_\eta; \quad \mu_1 = 0,5(1 - \nu); \quad \mu_2 = 0,5(1 + \nu); \end{aligned}$$

безразмерные параметры $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\bar{U} = Ua/h^2$, $\bar{V} = Vb/h^2$, $\bar{W} = W/h$, $\bar{P} = a^4 q / (Eh^4)$, $k_\xi = a^2 / (R_\xi h)$, $k_\eta = b^2 / (R_\eta h)$, $\lambda = a/b$; U , V , W — перемещения точек срединной поверхности оболочки относительно осей координат x , y , z соответственно (оси x и y направлены по линиям главных кривизн оболочки, ось z ортогонально к срединной поверхности оболочки, которая выбрана в качестве координатной поверхности, в сторону вогнутости); R_ξ , R_η — главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей x и y соответственно; a , b — размеры оболочки в плане; h — толщина оболочки; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Для линеаризации нелинейных уравнений в частных производных (11.17) применяется метод последовательных нагружений.

Линеаризованные уравнения пологих оболочек для модели Кирхгофа — Лява на k -м этапе нагружения имеют вид

$$\begin{aligned}
& \nabla_1 u_k + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \nabla_1 w_k + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + \frac{\partial w_k}{\partial \xi} (\nabla_1 \bar{W}_k - k_1) + \mu_2 \lambda^2 \frac{\partial w_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \\
& \mu_2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi \partial \eta} + \nabla_2 v_k + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \nabla_2 w_k + \mu_2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + \mu_2 \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial w_k}{\partial \eta} (\nabla_2 \bar{W}_k - k_2) = 0; \\
& 12 \frac{\partial u_k}{\partial \xi} (\nabla_3 \bar{W}_k - k_1) + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial u_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + 12 \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \xi} \nabla_3 w_k + \\
& + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda^2 k_2 \frac{\partial v_k}{\partial \eta} + 12 \lambda^2 \frac{\partial v_k}{\partial \eta} \nabla_4 \bar{W}_k + \\
& + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial v_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{W}_k}{\partial \xi \partial \eta} + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + 12 \lambda^2 \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \eta} \nabla_4 w_k - \frac{\partial^4 w_k}{\partial \xi^4} - 2 \lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial \eta^4} - \\
& - 12 (k_\xi k_1 + \lambda^2 k_\eta k_2) w_k + 12 \lambda^2 k_2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial w_k}{\partial \eta} + 12 k_1 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} - \\
& - 12 (\bar{W}_k \nabla_5 w_k + w_k \nabla_5 \bar{W}_k + 24 \mu_1 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \eta} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) + 24 \mu_1 \lambda^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} + \\
& + 12 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \nabla_3 \bar{W}_k + 6 \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \xi} \right)^2 \nabla_3 w_k + 6 \lambda^2 \left(\frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \right)^2 \nabla_4 w_k + \\
& + 12 \lambda^2 \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial \eta} \frac{\partial w_k}{\partial \eta} \nabla_4 \bar{W}_k + 12 (1 - \nu^2) p_k = 0.
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Здесь $\bar{U}_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i$; $\bar{V}_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$; $\bar{W}_k = \sum_{i=1}^{k-1} w_i$; $\bar{P}_k = \sum_{i=1}^{k-1} p_i$.

Системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (11.18) методом Власова — Канторовича сведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

В соответствии с методом Власова — Канторовича принимается: $u_N = \sum_{j=1}^N X_j(\xi) \varphi_j(\eta)$, $v_N = \sum_{j=1}^N Y_j(\xi) \psi_j(\eta)$, $w_N = \sum_{j=1}^N Z_j(\xi) \chi_j(\eta)$, где $\varphi_j(\eta)$, $\psi_j(\eta)$, $\chi_j(\eta)$ — известные аппроксимирующие функции. Для случая шарнирно-неподвижно закрепленного края они принимаются в виде: $\varphi_j(\eta) = \sin(\pi(2j-1)\eta)$; $\psi_j(\eta) = \sin(2\pi j\eta)$; $\chi_j(\eta) = \sin(\pi(2j-1)\eta)$. Функции $X_j(\xi)$, $Y_j(\xi)$, $Z_j(\xi)$ подлежат определению.

Если левые части первых трех уравнений (11.18) обозначить соответственно $I_1(u, v, w)$, $I_2(u, v, w)$, $I_3(u, v, w)$, то для определения $X_j(\xi)$, $Y_j(\xi)$, $Z_j(\xi)$ получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 L_1(u_N, v_N, w_N) \varphi_k(\eta) d\eta &= 0; \\ \int_0^1 L_2(u_N, v_N, w_N) \psi_k(\eta) d\eta &= 0; \\ \int_0^1 L_3(u_N, v_N, w_N) \chi_k(\eta) d\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \\ (k=1, 2, \dots, N).$$

После вычисления интегралов по переменной y получена система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $3N$. Граничная задача для этой системы сведена к начальной методом дополнительных функций (см. § 4.2.2). Последняя решена методом Рунге — Кутты (см. § 4.1).

На рис. 11.2 представлены результаты расчетов — графики «нагрузка — прогиб в центре оболочки» и эпюры напряжений в сечении $\eta=0,5$ ($\eta=y/b$) при $\bar{P}=180$ ($\bar{P}=a^4 q/(Eh^4)$) для оболочки с параметром кривизны $k_\xi=k_\eta=16$ ($k_\xi=a^2/(R_x h)$, $k_\eta=b^2/(R_y h)$).

Кривые 1—4 получены методом последовательных нагружений. Приращение ΔU_n , т. е. (u_k, v_k, w_k) в (11.18), на каждом шаге определялось из решения уравнения (11.12) при различных шагах нагружения ΔH_n , которые обозначены через p_k в (11.18). Кривая 5 получена модифицированным методом последовательных нагружений с использованием схемы (11.13).

Кривые 1 и 5 соответствуют одному и тому же значению шага нагружения, кривая 2 — шагу нагружения, уменьшенному вдвое (число шагов, следовательно, вдвое больше), кривая 3 — в четыре раза, кривая 4 — в восемь раз.

Из рис. 11.2 видно, что значение критической нагрузки (ордината точек максимума на графике «нагрузка — прогиб в центре оболочки») существенно зависит от шага нагружения в методе последовательных нагружений.

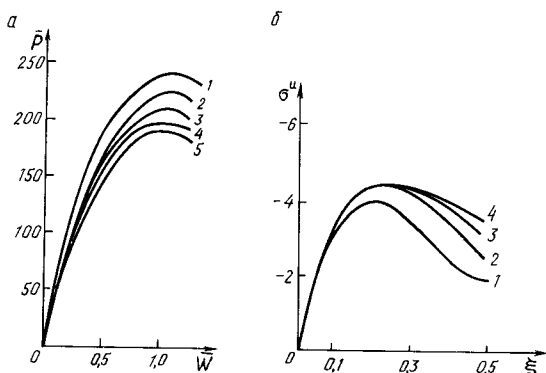


Рис. 11.2. Кривые «нагрузка — прогиб в центре оболочки» (а) и напряжения при изгибе (б), полученные методом последовательных нагружений и модифицированным методом

Применение модифицированного метода последовательных нагружений только второго порядка точности (11.13) позволяет повысить точность решения без увеличения времени счета. Кривая 5 на рис. 11.2 близка к кривой 4, хотя времени на ЭВМ затрачено почти в 4 раза меньше.

11.2.3. Метод последовательного наращивания ребер

При расчете ребристых пластин и оболочек решение существенно зависит не только от интенсивности нагрузки, но и от параметров, характеризующих размеры (высоту) ребер. Частный случай метода продолжения по параметру, в котором в качестве параметра принята высота ребер, назван методом последовательного наращивания ребер, хотя его можно применять и к расчету пластин и оболочек, ослабленных вырезами [33].

Уравнение равновесия пластин и пологих оболочек, подкрепленных ребрами [32], можно записать так:

$$F(U, H, q) = 0, \quad (11.19)$$

где H — высота ребер; U — вектор перемещений; q — параметр нагрузки. Дифференцируя по Фреше (11.19) по переменной H , приходят к уравнению

$$F'_U(U, H) \frac{dU}{dH} + F'_H(U, H) = 0,$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $U(H)$. Решение его нужно искать при начальных условиях $U(H_0) = U_0$, где U_0 — решение для гладкой оболочки ($H_0 = 0$) при заданном параметре нагрузки q . Для решения этой начальной задачи можно применять известные методы (например, метод Рунге — Кутты).

Если для решения начальной задачи используют метод Эйлера, приближенное решение строят по схеме $U_{n+1} = U_n + \Delta U_n$, $H_{n+1} = H_n + \Delta H_n$, где ΔH_n задают, а ΔU_n находят решением линейного уравнения

$$F'_U(U_n, H_n) \Delta U_n + F'_H(U_n, H_n) \Delta H_n = 0. \quad (11.20)$$

Сходимость рассматриваемого метода устанавливается теоремой о неявных функциях и ее обобщениями [22, 64]. Ограничения, накладываемые этой теоремой, выполняются в большинстве нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Таким образом, метод последовательного наращивания ребер позволяет на каждом этапе изменения высоты ребер (жесткостных характеристик конструкции) находить изменения деформированного состояния конструкции.

Пример 11.4. Используя метод последовательного наращивания ребер, найти перемещения в балке со ступенчато изменяющейся высотой, длиной 3 м, шарнирно-неподвижно закрепленной по краям и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (см. рис. 7.4). Сечение балки имеет вид квадрата со стороной 0,1 м для первого участка и прямоугольника той же ширины и высотой $0,1 + 2H$ для второго. Для упрощения записей ниже единицы величин опущены.

Момент инерции сечения балки на первом участке

$$I_1 = \int_{-0,05}^{0,05} dy \int_{0,05}^{0,05} z^2 dz = 0,1 \frac{2}{3} (0,05)^3 = 8,33 \cdot 10^{-6},$$

на втором

$$I_2 = \int_{-0,05}^{0,05} dy \int_{-(0,05+H)}^{0,05+H} z^2 dz = 0,1 \frac{2}{3} (0,05+H)^3 = I_1 + \Delta I,$$

где $\Delta I = 5 \cdot 10^{-4} H + 0,01 H^2 + 0,067 H^3$.

Уравнение оси изогнутой балки

$$((I_1 + u(x-1)\Delta I)w'')'' = q/E.$$

Здесь $u(x-1)$ — единичная функция Хевисайда; w — прогиб балки.

Уравнение (11.20) в данном случае

$$F'_w(x, w_i, H_i) \Delta w_i + F'_H(x, w_i, H_i) \Delta H_i = 0,$$

или в развернутом виде (на i -м этапе)

$$((I_1 + u(x-1)\Delta I_i) \Delta w_i'')'' + (u(x-1)\Delta I'_i \Delta H_i w_i'')'' = 0. \quad (11.21)$$

Здесь $\Delta I_i = 5 \cdot 10^{-4} H_i + 0,01 H_i^2 + 0,067 H_i^3$; $\Delta I'_i = 5 \cdot 10^{-4} + 0,02 H_i + 0,2 H_i^2$; $H_0 = 0$; $w_0 =$ — решение для балки постоянного сечения, т. е. при $H_i = H_0$; $\Delta I_0 = 0$; $\Delta I'_0 = 5 \cdot 10^{-4}$. Имеют место рекуррентные соотношения $H_{i+1} = H_i + \Delta H_i$, $w_{i+1} = w_i + \Delta w_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), где Δw_i находим из решения линейного относительно Δw_i уравнения (11.21).

Считаем ΔH_i постоянным. Пусть $H = 0,01$. Тогда $\Delta I = 6,1 \cdot 10^{-6}$, $I_2 = 14,4 \cdot 10^{-6}$.

Сначала примем $\Delta H = H = 0,01$. Уравнение (11.21) будет иметь вид

$$(I_1 \Delta w_0'')'' + (u(x-1) \Delta I'_0 \Delta H w_0'')'' = 0, \quad (11.22)$$

где $w_0 = q/(EI_1) (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 1,125x)$ — решение для балки постоянного сечения в виде квадрата со стороной 0,1 м.

Решая уравнение (11.22), получаем:

$$\Delta w_0 = -0,4 \frac{q}{EI_1} x, \quad x \in [0, 1];$$

$$\Delta w_0 = -0,6w_0 - 0,0753 \frac{q}{EI_1} x + 0,2259 \frac{q}{EI_1}, \quad x \in [1, 3].$$

Значит, $w_1 = w_0 + \Delta w_0$ имеет вид:

$$w_1 = \frac{q}{EI_1} (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 0,725x) \quad (x \in [0, 1]);$$

$$w_1 = \frac{q}{EI_1} (0,0167x^4 - 0,1x^3 + 0,3747x + 0,2259) \quad (x \in [1, 3]).$$

При $x = 1$ $w = 0,5166q/(EI_1)$.

Теперь примем $\Delta H = 0,005$. Тогда на первом шаге уравнение для определения Δw_0 будет иметь вид (11.22) при том же выражении для w_0 . Решая уравнение (11.22), находим:

$$\Delta w_0 = -0,2 \frac{q}{EI_1} x \quad (x \in [0, 1]);$$

$$\Delta w_0 = -0,3w_0 - 0,0376 \frac{q}{EI_1} x + 0,1129 \frac{q}{EI_1} \quad (x \in [1, 3]);$$

$$w_1 = \frac{q}{EI_1} (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 0,925x) \quad (x \in [0, 1]);$$

$$w_1 = \frac{q}{EI_1} (0,0292x^4 - 0,175x^3 + 0,75x + 0,1129) \quad (x \in [1, 3]).$$

На втором шаге $H_1=0,005$, $\Delta I_1=2,758 \cdot 10^{-6}$, $\Delta I'_1=6,05 \cdot 10^{-4}$. Уравнение (11.21) будет иметь вид

$$((I_1 + u(x-1) \Delta I_1) \Delta \omega''')'' + (u(x-1) \Delta I'_1 \Delta H \omega'')'' = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\Delta \omega_1 = -0,127 \frac{q}{EI_1} x \quad (x \in [0, 1]);$$

$$\Delta \omega_1 = -0,2728 \omega_1 - 0,034 \frac{q}{EI_1} x + 0,102 \frac{q}{EI_1} \quad (x \in [1, 3]).$$

Таким образом,

$$\omega_2 = \frac{q}{EI_1} (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 0,798x) \quad (x \in [0, 1]);$$

$$\omega_2 = \frac{q}{EI_1} (0,0212x^4 - 0,127x^3 + 0,511x + 0,1838) \quad (x \in [1, 3]).$$

При $x=1$ $\omega = 0,59q/(EI_1)$.

Если принять $\Delta H=0,0025$ и проделать 4 шага, получим при $x=1$ $\omega = 0,629q/(EI_1)$.

Решение поставленной задачи методами сопротивления материалов дает

$$\omega = \frac{q}{EI_1} (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 0,8426x), \quad x \in [0, 1];$$

$$\omega = \frac{q}{EI_1} (0,0417x^4 - 0,25x^3 + 1,033x + 0,2756), \quad x \in [1, 3].$$

При $x=1$ $\omega = 0,6342q/(EI_1)$. Это решение является точным.

Пример 11.5. Для иллюстрации эффективности применения метода последовательного наращивания ребер к расчету ребристых пластинок проведем сравнительный расчет пластинок этим методом и по методике, описанной в § 11.3.1.

Квадратная пластинка, шарнирно-неподвижно закрепленная по контуру, находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q . Пластинка допускает прогибы, соизмеримые с толщиной. Для расчетов использованы уравнения, учитывающие поперечные сдвиги (модель Тимошенко) [32]. Пластинка, сторона которой равна $a=60h$, где h — толщина пластинки, под-

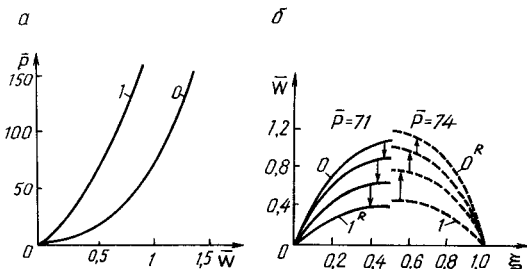


Рис. 11.3. Результаты расчета ребристых пластинок методом последовательного наращивания ребер:

а — зависимость «нагрузка — прогиб в центре пластинки»; б — график изменения прогиба по оси ξ в среднем сечении пластинки

креплена двумя пересекающимися по центру пластинки ребрами шириной $2h$ и высотой $3h$.

На рис. 11.3 нуль (0) означает, что пластинка не подкреплена ребрами, единица (1) — подкреплена ребрами. Расчет проведен по методике, изложенной в § 11.3.1.

Кривые с индексом R получены методом последовательного наращивания ребер с шагом по высоте ребра $|\Delta H| = h$ (три шага). Стрелками показан переход в эпюрах прогибов при каждом шаге (0^R означает, что исходной была оболочка, подкрепленная ребрами, высота которых изменяется с шагом $\Delta H = -h$, 1^R — что исходной была гладкая оболочка и ребра наращивались с шагом $\Delta H = h$).

Точность решения, полученного шаговым методом, зависит от выбранного шага. Как видно из рис. 11.3, даже при достаточно большом шаге $|\Delta H| = h$ точность решения методом последовательного наращивания ребер высока. Кроме того, метод позволяет находить изменения исходного напряженно-деформированного состояния конструкции как в случае увеличения ее жесткости (увеличения высоты ребер), так и в случае уменьшения (уменьшения высоты ребер).

Шаговый процесс наращивания ребер можно соединить с шаговым процессом по нагрузке, это позволит подбирать жесткость конструкции (высоту ребер) таким образом, чтобы оболочка не потеряла устойчивости.

11.3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

11.3.1. Нелинейные задачи статики

Уравнения равновесия (11.10), (11.19) пластин и пологих оболочек, допускающих прогибы, соизмеримые с толщиной, — это системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных 8—10-го порядка, записанные относительно функций перемещений U, V, W . Для модели Кирхгофа — Лява эти уравнения имеют вид (11.17).

Для решения таких уравнений можно применить методы сведения их к алгебраическим уравнениям (метод Бубнова — Галеркина, метод сеток и др.). При этом получают системы нелинейных алгебраических уравнений, решение которых может быть найдено итерационными методами (последовательных приближений, например), однако возникают трудности с выбором начального приближения и возможностью ветвления решения.

Другой путь решения исходных нелинейных дифференциальных уравнений состоит в следующем: к исходным уравнениям применяют методы линеаризации (например, метод последовательных нагружений, сводящий решение нелинейных уравнений к последовательному решению систем линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от истории нагружения).

Линеаризованные методом последовательных нагружений уравнения (11.17) имеют вид (11.18).

Систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций u_k, v_k, w_k (11.18) методом Бубнова — Галеркина сводят к системе линейных алгебраических

уравнений, приняв $u_k = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(\xi, \eta)$, $v_k = \sum_{i=1}^N b_i \psi_i(\xi, \eta)$, $w_k = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i(\xi, \eta)$, где $\varphi_i(\xi, \eta)$, $\psi_i(\xi, \eta)$, $\chi_i(\xi, \eta)$ — аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Согласно методу Бубнова — Галеркина, для определения a_i , b_i , c_i получают систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N (A_{ij}a_i + B_{ij}b_i + C_{ij}c_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^N (D_{ij}a_i + E_{ij}b_i + F_{ij}c_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^N (G_{ij}a_i + H_{ij}b_i + S_{ij}c_i) &= T_{ij}p_k \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

(11.23)

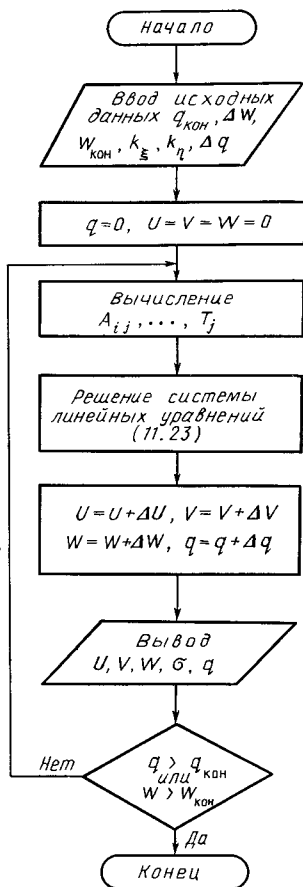


Рис. 11.4. Схема алгоритма расчета оболочек при статическом нагружении

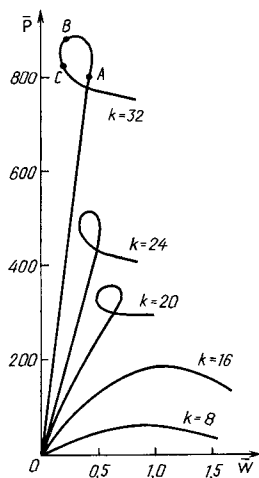


Рис. 11.5. Кривые «нагрузка — прогиб в центре» для пологих оболочек, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой

Значения A_{ij} , B_{ij} , ..., T_{ij} зависят от исходных данных и от накопленных к k -му этапу значений $\bar{U}_k$, $\bar{V}_k$, $\bar{W}_k$, $\bar{P}_k$.

Решение системы уравнений (11.23) находят методом Гаусса.

Для повышения точности линеаризации целесообразно использовать модификацию метода последовательных нагружений (11.13). При этом на каждом этапе нагружения необходимо два раза решить систему уравнений (11.18) при разных значениях $\bar{U}_k, \bar{V}_k, \bar{W}_k$. Схема описанного выше алгоритма представлена на рис. 11.4.

Пример 11.6. Используя описанный выше алгоритм, провести расчет квадратных в плане пологих оболочек, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки q при разных значениях кривизны $k_2 = k_1 = k$.

На рис. 11.5 представлены результаты расчета таких оболочек, т. е. графики «нагрузка — прогиб в центре оболочки».

Для обхода петель графиков необходимо в процессе счета изменять выбранный параметр. До точки A решение ведется по параметру p_k — шагу по нагрузке. В точке A изменяет знак приращение прогиба ω_k в центре оболочки. От точки A до точки B за параметр принять приращение прогиба ω_k в центре оболочки. В точке B изменяет знак приращение нагрузки p_k . От точки B до точки C параметром является приращение нагрузки p_k (оно отрицательно). В точке C изменяет знак приращение прогиба ω_k в центре оболочки (оно становится положительным). От точки C и далее за параметр принять приращение прогиба ω_k в центре оболочки.

11.3.2. Нелинейные задачи динамики пологих оболочек

Уравнения движения пологих оболочек приведены в § 7.3.2. Если в этих уравнениях усилия и моменты выразить через перемещения, можно получить уравнения движения в перемещениях. Эти уравнения в безразмерной форме будут иметь те же левые части, что и уравнения (11.17). Если левые части уравнений системы (11.17) обозначить соответственно $L_1(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, $L_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, $L_3(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, уравнения движения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} L_1(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) &= \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{t}^2}; \\ L_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) &= \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{t}^2}; \\ L_3(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) &= 12 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{t}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

где $\bar{t}$ — безразмерный параметр времени.

Для уравнений (11.24) решают смешанную задачу, так как на контуре оболочки известны граничные условия, а по временной координате задают начальные условия.

Смешанная задача методом Власова — Канторовича сводится к начальной задаче по временной координате $\bar{t}$. Начальная задача решается методом Рунге — Кутты.

В соответствии с методом Власова — Канторовича принимают:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N T_{1i} U_{1i}; \quad \bar{V} = \sum_{i=1}^N T_{2i} V_{1i}; \quad \bar{W} = \sum_{i=1}^N T_{3i} W_{1i}. \quad (11.25)$$

Здесь U_i, V_i, W_i — известные функции переменных ξ и η аппроксимирующие функции, удовлетворяющие граничным условиям на краях оболочки; T_i, T_2, T_3 — функции переменной t , подлежащие определению.

Подставив выражения (11.25) в систему уравнений движения (11.24) (умножив первое, второе и третье уравнения соответственно на U_i, V_i, W_i и проинтегрировав полученные равенства по переменным ξ и η), получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения T_1, T_2, T_3

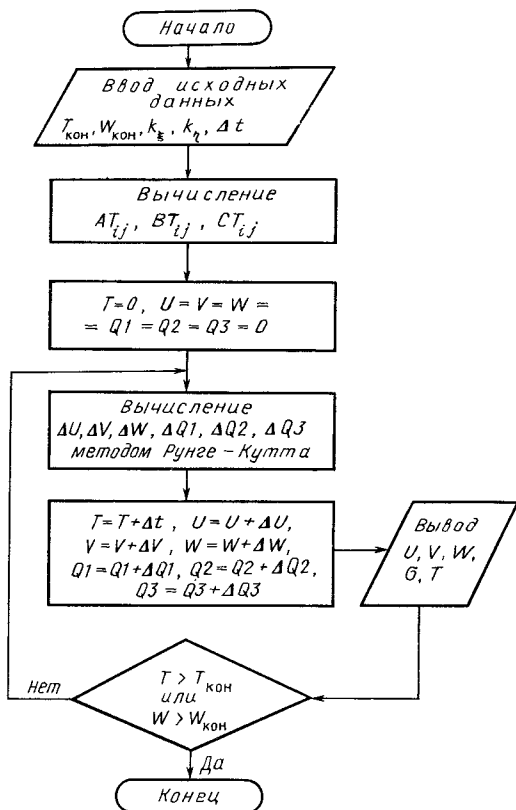


Рис. 11.6. Схема алгоритма расчета пологих оболочек при динамическом нагружении

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N T_1'' AT_{ij} &= AK1_j; \\ \sum_{i=1}^N T_2'' BT_{ij} &= AK2_j; \\ \sum_{i=1}^N T_3'' CT_{ij} &= AK3_j \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, \dots, N).$$

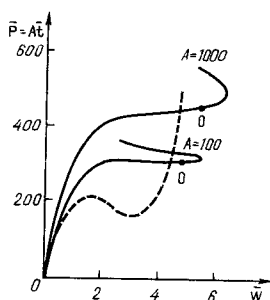


Рис. 11.7. Кривые «нагрузка - прогиб в центре» для пологих оболочек, полученные при различных скоростях нагружения

Здесь $AK1_j, AK2_j, AK3_j$ содержат искомые функции T_1, T_2, T_3 .
Схема алгоритма решения этой задачи показана на рис. 11.6, где $Q1_i = T_1', Q2_i = T_2', Q3_i = T_3'$.

Пример 11.7. По описанному выше алгоритму провести расчет квадратных в плане пологих оболочек, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и нагруженных равномерно распределенной по площади и линейно изменяющейся во времени нагрузкой $q = A_1 t$ при начальных условиях

$$\bar{U} = V = W = 0, \quad \partial \bar{U} / \partial t = \partial \bar{V} / \partial t = \partial \bar{W} / \partial t = 0.$$

На рис. 11.7 представлены результаты расчета графики «нагрузка — прогиб в центре оболочки» для оболочки с параметрами кривизны $k_x = k_y = 16$ при различных скоростях нагружения A ($\bar{P} = A \bar{t} = q a^4 / (E h^4)$). Пунктиром показана кривая, соответствующая статическому нагружению оболочки равномерно распределенной нагрузкой q . Если использовать критерий А. С. Вольмира потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении [18], за критическую нагрузку следует принять ординату точки O на графиках «нагрузка — прогиб в центре оболочки». После «прохлопывания» оболочка совершает колебания около своего нового равновесного состояния. Следует сказать, что при решении начальной задачи шаг по времени следует брать тем меньше, чем больше скорость нагружения A .

Описанная в § 11.3.2 методика решения динамических задач может быть использована и для исследования свободных нелинейных колебаний пластин и оболочек. Для этого задают начальные перемещения $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ или начальные скорости $\partial \bar{U} / \partial t$, $\partial \bar{V} / \partial t$, $\partial \bar{W} / \partial t$, не равные нулю, а нагрузку q принимают равной нулю. Результатом решения являются значения перемещений.

11.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

11.4.1. Основные соотношения физически нелинейной теории упругости

Наиболее общие соотношения нелинейной теории упругости [56] учитывают не только физическую нелинейность материала, т. е. отклонения от закона Гука в зависимостях между деформациями и напряжениями, но и геометрическую нелинейность деформирования тела. Ниже рассматривается решение только физически нелинейных задач при линеаризованных геометрических соотношениях [40]. Предполагается, что деформации тела, оставаясь малыми, связаны с напряжениями нелинейными зависимостями. Остальные зависимости (уравнения равновесия, уравнения Коши, условия совместности деформаций и граничные условия) являются линейными и не отличаются от зависимостей линейной теории упругости.

Интенсивность касательных напряжений определяется формулой

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3} ((\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2)},$$

где σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные напряжения; σ_0 — среднее напряжение: $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$.

Интенсивность деформаций сдвига

$$\psi_0 = 2 \sqrt{\frac{1}{3} ((\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_0)^2)},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации; ε_0 — среднее удлинение: $\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$.

Основными соотношениями физически нелинейной теории упругости являются зависимости между напряжениями и деформациями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 3K\kappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \\ \sigma_y &= 3K\kappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \sigma_z &= 3K\kappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_z - \varepsilon_0); \\ \tau_{xy} &= G\gamma(\psi_0^2)\psi_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G\gamma(\psi_0^2)\psi_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G\gamma(\psi_0^2)\psi_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

где экспериментальным путем определяют: K — модуль объемной деформации, G — модуль сдвига, $\kappa(\varepsilon_0)$ — функцию удлинения, $\gamma(\psi_0^2)$ — функцию сдвига. При $\kappa(\varepsilon_0) = \gamma(\psi_0^2) = 1$ эти уравнения дают обычные соотношения между напряжениями и деформациями линейной теории упругости.

Решение уравнений (11.26) относительно деформаций дает соотношения между деформациями и напряжениями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} K(s_0)\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)(\sigma_x - \sigma_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} K(s_0)\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)(\sigma_y - \sigma_0); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0)\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)(\sigma_z - \sigma_0); \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\tau_{xy}; \\ \psi_{yz} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\tau_{yz}; \\ \psi_{zx} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\tau_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

где введены обозначения среднего приведенного нормального напряжения $s_0 = \sigma_0/(3K)$, средней приведенной интенсивности касательных напряжений $t_0 = \tau_0/G$, а также функции среднего напряжения $k(s_0)$ и функции интенсивности касательных напряжений $g(t_0^2)$. При $k(s_0) = g(t_0^2) = 1$ уравнения (11.27) дают обычные соотношения между деформациями и напряжениями линейной теории упругости.

Простейшим является случай нелинейной деформации, при которой функция среднего напряжения $k(s_0) = 1$, а функция интенсивности касательных напряжений изменяется по степенному закону: $g(t_0^2) = 1 + g_{n-1}t_0^{n-1}$. Наименьшее значение n , при котором сохра-

няется нелинейная зависимость, $n=3$. При этом $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$, где значение величины g_2 определяется экспериментально.

11.4.2. Плоское напряженное состояние

Для тела, находящегося в плоском напряженном состоянии, например для тонкой пластинки, расположенной в плоскости декартовых координат xOy и нагруженной в этой же плоскости (рис. 11.8), принимается: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\varepsilon_z = \psi_{xz} = \psi_{yz} = 0$. Остальные напряжения и деформации мало изменяются в направлении оси z , перпендикулярной к плоскости xOy , и считаются функциями только координат x и y :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \sigma_y = \sigma_y(x, y); \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y);$$

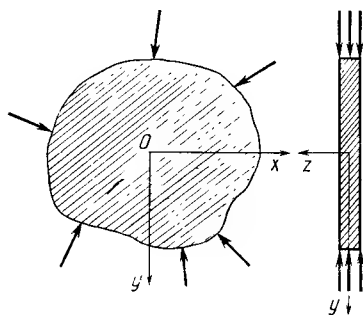
$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y); \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y); \psi_{xy} = \psi_{xy}(x, y).$$

В связи с этим в физически нелинейной теории упругости для плоского напряженного состояния справедливы следующие уравнения: уравнения равновесия (без учета объемных сил)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (11.28)$$

уравнения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \psi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (11.29)$$



условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (11.30)$$

краевые условия (l, m — направляющие косинусы)

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m, \quad Y_v = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \quad (11.31)$$

Рис. 11.8. Тонкая пластинка, находящаяся в условиях плоского напряженного состояния

соотношения между деформациями и напряжениями в соответствии с (11.27)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_x - \sigma_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_y - \sigma_0), \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Решение задачи о плоском напряженном состоянии в напряжениях определяется подстановкой соотношений (11.32) в условия (11.30). В результате получают условие совместности деформаций, выраженное в напряжениях:

$$\Delta \left(\left(\frac{1}{9K} k(s_0) + \frac{1}{3G} g(t_0^2) \right) (\sigma_x + \sigma_y) \right) = \\ = \frac{1}{2G} \left(\sigma_x \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right), \quad (11.33)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

Уравнение (11.33) вместе с двумя уравнениями равновесия (11.28) образует систему трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными (σ_x , σ_y и τ_{xy}). В случае линейной зависимости между деформациями и напряжениями, т. е. при $k(s_0) = g(t_0^2) = 1$, уравнение (11.33) переходит в уравнение совместности деформаций линейной теории упругости: $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$.

Для решения системы уравнений (11.28), (11.33), как и в линейной теории упругости, вводят функцию напряжений Эри $\varphi(x, y)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (11.34)$$

Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, а уравнение (11.33) дает дифференциальное уравнение для нахождения функции $\varphi(x, y)$:

$$\Delta \left(\left(\frac{1}{9K} k(\varphi_0) + \frac{1}{3G} g(t_0^2) \right) \Delta \varphi \right) - \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g(t_0^2)}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Для частного случая $k(s_0) = 1$, $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$ это уравнение имеет вид

$$\Delta \left(\left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} + \frac{1}{3G} g_2 t_0^2 \right) \Delta \varphi \right) - \frac{g_2}{2G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 t_0^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 t_0^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 t_0^2}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

а при постоянной материала

$$\lambda = g_2 K / ((3K + G) G^2) \quad (11.35)$$

и $t_0 = \tau_0 / G$ получается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка относительно функции напряжений $\varphi(x, y)$

$$\Delta \Delta \varphi + \lambda (\varphi_{xxxx} (2\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2 - 2\varphi_{xx}\varphi_{yy}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_{yyyy} (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2 - 2\varphi_{xx}\varphi_{yy}) + \\
& + 2\varphi_{xxyy} (\varphi_{xx}\varphi_{yy} + 8\varphi_{xy}^2) + \\
& + 2(2\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) (2\varphi_{xy}\varphi_{xxyy} + \varphi_{xxx}^2) + \\
& + 2(2\varphi_{yy} - \varphi_{xx}) (2\varphi_{xy}\varphi_{xyyy} + \varphi_{yyy}^2) + \\
& + 2\varphi_{xxy}^2 (3\varphi_{xx} - \varphi_{yy}) + 2\varphi_{xyy}^2 (3\varphi_{yy} - \varphi_{xx}) + \\
& + 2\varphi_{yy}\varphi_{xxx}\varphi_{xyy} + 2\varphi_{xx}\varphi_{xxy}\varphi_{yyy} + \\
& + 2\varphi_{xy} (\varphi_{xxy}\varphi_{xyy} - \varphi_{xxx}\varphi_{yyy}) + \\
& + 12\varphi_{xy} (\varphi_{xxx}\varphi_{xxy} + 2\varphi_{xxy}\varphi_{xyy} + \varphi_{xyy}\varphi_{yyy}) = 0, \quad (11.36)
\end{aligned}$$

где нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным.

11.4.3. Решение физически нелинейной задачи о плоском напряженном состоянии методом малого параметра

В методе малого параметра (см. гл. 8) решение $\varphi(x, y)$ нелинейного дифференциального уравнения (11.36) рассматривается в виде степенной функции от входящего в это уравнение малого параметра λ , определяемого выражением (11.35):

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \lambda\varphi^{(1)} + \lambda^2\varphi^{(2)} + \dots \quad (11.37)$$

Подстановка этого ряда в уравнение (11.36) дает бесконечную систему бигармонических уравнений для определения функций $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... Первое из этих уравнений, состоящее из членов, не содержащих λ , соответствует уравнению линейной теории упругости относительно $\varphi^{(0)}$

$$\Delta\Delta\varphi^{(0)} = 0. \quad (11.38)$$

Приравнивание нулю суммы коэффициентов при λ в первой степени дает уравнение для определения функции $\varphi^{(1)}$

$$\Delta\Delta\varphi^{(1)} + A_0 = 0, \quad (11.39)$$

где A_0 — выражение, составленное из производных функции $\varphi^{(0)}$, известное из решения предыдущего уравнения.

Приравнивание нулю суммы коэффициентов при λ^2 дает уравнение

$$\Delta\Delta\varphi^{(2)} + A_{01} = 0, \quad (11.40)$$

где A_{01} — выражение, составленное из производных функций $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$, найденное из решения предыдущих уравнений.

Процесс продолжают до тех пор, пока функция напряжений $\varphi(x, y)$ получается по (11.37) с заданной точностью.

Напряжения, исходя из разложения (11.37), можно также выразить в виде степенных рядов

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sigma_x^{(0)} + \lambda \sigma_x^{(1)} + \lambda^2 \sigma_x^{(2)} + \dots; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sigma_y^{(0)} + \lambda \sigma_y^{(1)} + \lambda^2 \sigma_y^{(2)} + \dots; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}^{(0)} + \lambda \tau_{xy}^{(1)} + \lambda^2 \tau_{xy}^{(2)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

где множители при λ^n определяют по найденным значениям членов разложений для производных функций напряжений:

$$\sigma_x^{(n)} = \varphi_{yy}^{(n)}; \quad \sigma_y^{(n)} = \varphi_{xx}^{(n)}; \quad \tau_{xy}^{(n)} = -\varphi_{xy}^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (11.42)$$

Пример 11.8. Найти нормальные напряжения σ_x , возникающие при изгибе защемленной одним концом тонкой полосы, нагруженной силой F на свободном конце (рис. 11.9).

Считаем, что материал полосы подчиняется нелинейному закону упругости, при котором функция среднего напряжения и функция интенсивности касательных напряжений заданы в виде:

$$k(s_0) = 1, \quad g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2. \quad (11.43)$$

Изгиб этой полосы в постановке линейной теории плоского напряженного состояния рассматривается с помощью следующей функции напряжений Эри [80]:

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{6} c x (y^3 - 3b^2 y), \quad (11.44)$$

где $c = -(3/2)F/(b^3 h)$.

Решение (11.44) в линейной постановке удовлетворяет заданным граничным условиям.

Рассмотрим решения нелинейной задачи методом малого параметра, принимая за нулевое приближение (11.38) решение (11.44), т. е. $\varphi^{(0)} = \varphi^*$.

Уравнение первого приближения (11.39) в данном случае принимает вид

$$\Delta \Delta \varphi^{(1)} + 2c^3 (2x^3 y + 8xy^3 - 5b^2 xy) = 0. \quad (11.45)$$

В связи с тем что функция напряжений в нулевом приближении $\varphi^{(0)}$ удовлетворяет заданным граничным условиям, поправка к ней $\varphi^{(1)}$ по (11.37) не должна

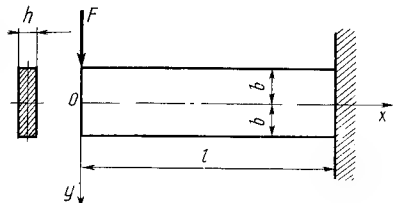


Рис. 11.9. Изгиб тонкой полосы прямоугольного поперечного сечения

влиять на эти условия. Другими словами, следует потребовать, чтобы в первом приближении выполнялись условия: вдоль верхнего и нижнего края полосы при $y = \pm b$ $\sigma_y^{(1)} = 0$ и $\tau_{xy}^{(1)} = 0$, а на левом (свободном) конце полосы при $x = 0$ $\sigma_x^{(1)} = 0$

$$\text{и } \int_{-b}^b \tau_{xy}^{(1)} dy = 0.$$

Представив решение уравнения (11.45) в виде суммы некоторого частного интеграла и решения однородного бигармонического уравнения $\Delta\Delta\varphi^{(1)}=0$, удовлетворяющих указанным условиям, получим выражение для функции $\varphi^{(1)}$ первого приближения

$$\varphi^{(1)} = -\frac{c^3}{60} \left(2x^3y^5 + \frac{4}{7}xy^7 - 4b^2x^3y^3 - \right. \\ \left. - \frac{13}{5}b^2xy^5 + 2b^4x^3y + \frac{122}{35}b^4xy^3 - \frac{51}{35}b^6xy \right). \quad (11.46)$$

Аналогично можно получить поправку к функции напряжений $\varphi^{(2)}$ во втором приближении по (11.40) и т. д.

Ограничимся в данном примере определением функций $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$. Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} найдем по (11.41), определив множители при $\lambda^{(0)}$ и λ из (11.42) при $\varphi^{(0)} = \varphi^*$ и $\varphi^{(1)}$ из выражений (11.45) и (11.46). Подставляя выражение (11.44) в (11.42), получаем:

$$\sigma_x^{(0)} = \varphi_{yy}^{(0)} = cxy; \quad \sigma_y^{(0)} = \varphi_{xx}^{(0)} = 0; \\ \tau_{xy}^{(0)} = -\frac{c}{2}(y^2 - b^2), \quad (11.47)$$

что соответствует решению данной задачи в линейной постановке [80].

Подставляя выражение (11.46) в (11.42), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -\frac{c^3}{15}xy \left(10x^2y^2 - 6b^2x^2 + 6y^4 - 13b^2y^2 + \frac{183}{35}b^4 \right); \\ \sigma_y^{(1)} &= -\frac{c^3}{5}xy(b^2 - y^2)^2; \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{c^3}{60} \left(30x^2y^4 - 36b^2x^2y^2 + 64b^4x^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4y^6 - 13b^2y^4 + \frac{366}{15}b^4y^2 - \frac{51}{35}b^6 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

Из двух приближений, взятых в разложениях (11.41), видно, что, помимо изменения напряжений σ_x и τ_{xy} по сравнению с решением в линейной постановке, появилось еще напряжение σ_y , отсутствующее в линейном решении.

Для оценки полученных напряжений принимаем следующие числовые значения величин, принятые в [40]: $F=3,33$ Н; $b=5$ см; $l=50$ см; $h=1$ см; $K=1,33 \cdot 10^5$ МПа; $G=0,47 \cdot 10^5$ МПа; $g_2=7,26 \cdot 10^6$.

По формуле (11.35) определяем $\lambda=0,98 \cdot 10^{-3}$ (МПа)² и, согласно (11.41), (11.47), (11.48), найдем напряжение σ_x в защемлении при $x=l$, $y=-b$: $\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \lambda\sigma_x^{(1)} = 10,0 - 0,98 \cdot 10^{-3} \cdot 266 = 10,0 - 0,26 = 9,74$ МПа.

В данном примере учет физической нелинейности приводит к уменьшению наибольшего напряжения σ_x по сравнению с линейным решением.

11.4.4. Метод упругих решений

Этот метод, предложенный А. А. Ильюшиным, получил большое распространение при решении упругопластических задач.

Рассматривается трехмерное тело [79], уравнения равновесия которого описаны в § 7.2.2. Нелинейные зависимости, связывающие

напряжения и деформации, можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) \theta + 2G(1-\omega) \varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) \theta + 2G(1-\omega) \varepsilon_y; \\ \sigma_z &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) \theta + 2G(1-\omega) \varepsilon_z; \\ \tau_{xy} &= G(1-\omega) \gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G(1-\omega) \gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G(1-\omega) \gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

где $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\omega = 1 - \sigma_i / (3G\varepsilon_i)$; $\lambda = \nu E / ((1+\nu)(1-2\nu)) = 2\nu G / (1-2\nu)$; λ — параметр Ламе.

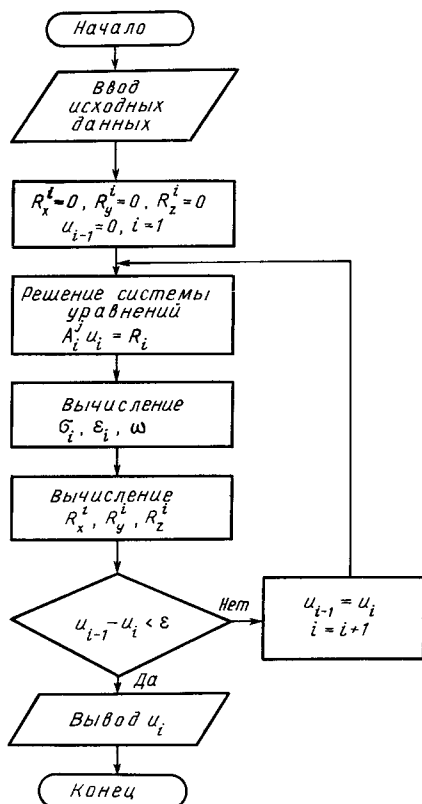


Рис. 11.10. Схема алгоритма метода упругих решений

Геометрические соотношения при малых перемещениях представлены в § 7.2.2. Подстановкой (11.49) в уравнения равновесия трехмерного тела с учетом указанных соотношений получают уравне-

ния равновесия в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X}{G} &= R_x; \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= R_y; \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= R_z, \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

где

$$\begin{aligned} R_x = & \left(\nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \omega - 2 \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned}$$

Аналогично записываются R_y и R_z [79]. В выражениях для R_x , R_y , R_z ω определяется из принятого соотношения $\sigma_i/\epsilon_i = = 3G(1-\omega)$.

Для решения системы уравнений (11.50) методом упругих решений процесс строится так, что на каждом шаге решается упругая задача. В качестве первого приближения отыскивается решение системы уравнений (11.50) при $R_x=R_y=R_z=0$, удовлетворяющее условиям на границе тела.

Полученные выражения для перемещений u_1 , v_1 , w_1 используют для отыскания $\epsilon_i(x, y, z)$, $\sigma_i(x, y, z)$, $\omega(x, y, z)$ и вычисления R_x^1 , R_y^1 , R_z^1 . Затем определяют второе приближение решения системы уравнений (11.50). При отыскании второго приближения u_2 , v_2 , w_2 правые части уравнений принимают в виде R_x^1 , R_y^1 , R_z^1 , которые являются известными.

После нахождения u_2 , v_2 , w_2 снова определяют ϵ_i , σ_i , ω_i и вычисляют правые части R_x^2 , R_y^2 , R_z^2 , и т. д.

Уравнения (11.50) можно записать в виде

$$Au = F,$$

где u — вектор перемещений, F — вектор правых частей: $F = (R_x, R_y, R_z)^*$.

Схема алгоритма решения задачи методом упругих решений представлена на рис. 11.10.

11.4.5. Применение метода последовательных нагружений к расчету пластинок из нелинейно-упругого материала

Наиболее наглядно применение метода последовательных нагружений показывается на примере расчета пластинок из нелинейно-упругого материала [60]. Для пластинки, допускающей малые про-

гибы, уравнение равновесия имеет вид

$$D \nabla^4 W + 2L_1(D, \nabla^2 W) + \nabla^2 D \nabla^2 W - \frac{1}{2} L(D, W) = \frac{3}{4} q,$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$L_1(D, \nabla^2 W) = \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial y};$$

$$L(D, W) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} dz$ — переменная жесткость пластинки; W — прогиб

пластинки; q — интенсивность поперечной нагрузки; h — толщина пластинки; σ_i — интенсивность напряжений; ε_i — интенсивность деформаций, причем

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 &= \frac{4}{3} \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} \right) = \\ &= \frac{4}{3} z^2 \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Если зависимость между интенсивностью напряжений и деформаций принять в виде $\sigma_i = E \varepsilon_i - m \varepsilon_i^2$, переменная жесткость пластинки может быть выражена через прогиб:

$$D = D_1 - D_2 \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right),$$

где $D_1 = Eh^3/12$; $D_2 = mh^5/60$; E ; m — постоянные, определяемые при испытаниях материала.

Теперь уравнение равновесия примет вид

$$D_1 \nabla^4 W - D_2 \left(\frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial y^2} \right) = \frac{3}{4} q, \quad (11.51)$$

где F_{xx} , F_{xy} , F_{yy} — нелинейные дифференциальные функции W .

Для решения нелинейного уравнения (11.51) применяется метод последовательных нагружений.

Линеаризованное уравнение (11.12) для уравнения (11.51) на k -м этапе нагружения

$$D_1 \nabla^4 w_k - A_x \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - A_y \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} - A_{xy} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} -$$

$$\begin{aligned}
& -B_x \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial x^3} - B_y \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial y^3} - C_x \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial x^2 \partial y} - C_y \frac{\partial^3 \omega_k}{\partial x \partial y^2} - \\
& -D_x \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^4} - D_y \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial y^4} - D_{xy} \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^2 \partial y^2} - R_x \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x^3 \partial y} - \\
& -R_y \frac{\partial^4 \omega_k}{\partial x \partial y^3} = \frac{3}{4} p_k.
\end{aligned} \tag{11.52}$$

Здесь $\omega_k(x, y)$ — приращение прогиба $W(x, y)$; $p_k(x, y)$ — приращение нагрузки $q(x, y)$; $A_x, A_y, \dots, R_y$ — переменные коэффициенты, зависящие от накопленного значения прогиба W [60].

На k -м этапе нагружения

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i(x, y), \quad q(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(x, y).$$

Линейное дифференциальное уравнение (11.52) может быть решено методами, описанными в главе 5.

Таким образом, методом последовательных нагружений решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линейных упругих задач. При этом на каждом этапе нагружения материал пластинки считается упругим, неоднородным.

11.5. РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ И МЕМБРАН

11.5.1. Статический расчет нити

Гибкой нитью называется стержень с бесконечно малой жесткостью при изгибе (трос, канат, струна и т. д.). Нить работает только на растяжение, и растягивающее усилие T направлено по касательной к нити. Особенность расчета гибкой нити состоит в том, что ее начальная форма зависит от характера нагрузки. Поэтому в начальном состоянии нить считается нерастяжимой, а далее расчет ведут по деформированному ее состоянию как для упругой нити. В соответствии с [63] уравнение прогибов нити имеет вид

$$\frac{d}{dz} \left(H \frac{dy}{dz} \right) = q, \tag{11.53}$$

где H — распор; q — интенсивность вертикальной нагрузки. Из рис. 11.11 видно, что

$$T = \sqrt{H^2 + Q^2}; \quad \frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{H}, \tag{11.54}$$

где Q — перерезывающее усилие.

Условия равновесия элемента нити:

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dH}{dz} = h, \tag{11.55}$$

где h — интенсивность горизонтальной нагрузки (например, ветровой).

Уравнение прогибов нити (11.53) в интегральной форме

$$y(z) = \int_0^z \operatorname{tg} \alpha(z_1) dz_1 + y(0) = \int_0^z \frac{Q(z_1)}{H(z_1)} dz_1 + y(0). \quad (11.56)$$

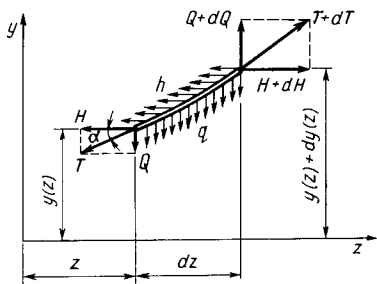


Рис. 11.11. Элемент гибкой нити, находящийся в равновесии

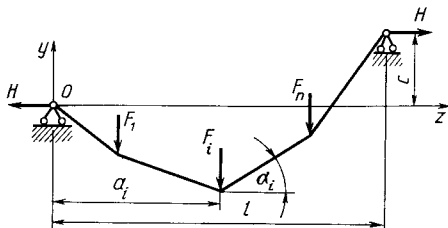


Рис. 11.12. Гибкая нить под действием n вертикальных сил F_i

Рассмотрим некоторые случаи статического расчета гибких нитей.

1. Гибкая нерастяжимая невесомая нить находится под действием системы n вертикальных сил (рис. 11.12).

Если известен распор H , в соответствии с уравнением (11.56)

$$y(a_i) = -\frac{1}{H} \left(\sum_{j=1}^i F_j \frac{(l-a_i)a_j}{l} + \sum_{j=i+1}^n F_j \frac{(l-a_j)a_i}{l} \right) + c \frac{a_i}{l}. \quad (11.57)$$

Натяжение нити на участке $[i, i+1]$

$$T_i = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}; \quad \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y(a_{i+1}) - y(a_i)}{a_{i+1} - a_i}. \quad (11.58)$$

2. Гибкая нерастяжимая нить под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 11.13).

При отсутствии распределенной горизонтальной нагрузки ($h=0$) значение распора H постоянное для всех сечений нити. Дифференциальное уравнение прогибов (11.53) при $H=\text{const}$ имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H}. \quad (11.59)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$y(z) = -\frac{q}{2H} (lz - z^2) + c \frac{z}{l}. \quad (11.60)$$

3. Гибкая нерастяжимая весомая нить. При больших прогибах нити учитывается наклонное положение элемента (см. рис. 11.12).

Тогда интенсивность нагрузки

$$q = q_0 \sqrt{1 + (dy/dz)^2}; \quad q_0 = \rho g A, \quad (11.61)$$

где ρ — плотность материала нити; A — площадь поперечного сечения.

В этом случае дифференциальное уравнение прогибов (11.59) будет иметь вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q_0}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}, \quad (11.62)$$

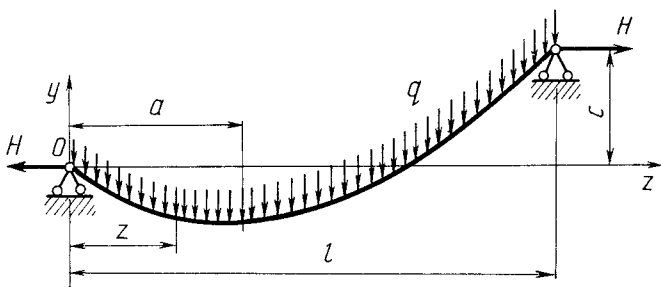


Рис. 11.13. Гибкая нить под действием равномерно распределенной нагрузки

а его решение при $H = \text{const}$

$$y(z) = \frac{H}{q_0} \left(\text{ch} \left(\frac{q_0}{H} (z-a) \right) - \text{ch} \left(\frac{q_0}{H} a \right) \right). \quad (11.63)$$

Здесь a — есть абсцисса сечения нити, для которого $dy/dz = 0$ (см. рис. 11.13).

Значение a определяют из условия $y(l) = c$, которое приводит к уравнению

$$\frac{c q_0}{H} = \text{ch} \frac{q_0}{H} (l-a) - \text{ch} \frac{q_0}{H} a, \quad (11.64)$$

решаемому способом подбора.

Если опоры нити находятся в одном уровне ($c = 0, a = l/2$),

$$y(z) = \frac{H}{q_0} \left(\text{sh} \frac{q_0}{H} (l-a) + \text{sh} \frac{q_0}{H} a \right). \quad (11.65)$$

4. Гибкая упругая пологая нить под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q . Для пологих нитей ($y, \dots \leq l/8$) выполняется условие $dy/dz \ll 1$, поэтому натяжение нити приближенно принимается равным распуру:

$$T = H \sqrt{1 + (dy/dz)^2} \approx H.$$

Принимая за L_0 начальную длину нити, $c=0$, а за относительное удлинение $\varepsilon = H/(EA)$, вычисляют распор

$$H = \frac{ql}{2\sqrt{6}} \left(\frac{L_0}{l} \left(1 + \frac{H}{EA} \right) - 1 \right)^{1/2} \quad (11.66)$$

Максимальный прогиб

$$y_{\max} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} l \left(\frac{L_0}{l} \left(1 + \frac{H}{EA} \right) - 1 \right)^{1/2} \quad (11.67)$$

Если считать $L_0 \approx l$, то

$$ql = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{EH}} \sqrt{H^3}; \quad y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{l}{\sqrt[3]{EA}} \sqrt[3]{ql} \quad (11.68)$$

11.5.2. Уточненный расчет пологой гибкой нити

Уточнение расчета пологой гибкой нити с учетом упругой деформации производится путем определения разности между начальной длиной нити L_0 и расстоянием между опорами l , т. е. характеристики кривой провисания $C/2 = L_0 - l$.

Натяжение нити с неподвижными опорами, расположенными в разных уровнях, нагруженной произвольной вертикальной нагрузкой (рис. 11.14), определяется из кубического уравнения [67]

$$\frac{H^3}{EA} \frac{l}{\cos^2 \varphi} + H^2 \frac{C}{2 \cos^3 \varphi} = \frac{D}{2}, \quad (11.69)$$

где $l = (x_1 - x_0)/\cos \varphi$ — расстояние между опорами; $C/2$ — характеристика кривой провисания нити, определяемая в соответствии с данными [41, 67] по табл. 11.2; D — характеристика нагрузки, определяемая по прил. 13.

В частном случае при начальной длине нити, приближенно равной расстоянию между опорами, находящимися в одном уровне ($\varphi=0$, $C=0$, $L_0 \approx l$), из (11.69) следует, что

$$(H^3/(EA))l = D/2, \quad (11.70)$$

откуда можно найти приближенное значение H по (11.68) для случая равномерно распределенной нагрузки q .

В случае температурного воздействия на гибкую нить натяжение находят из уравнения (11.69), где значение характеристики кривой провисания определяется по формуле

$$C_l/2 = C/2 + l\alpha\Delta t. \quad (11.71)$$

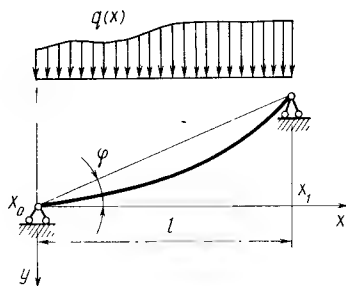
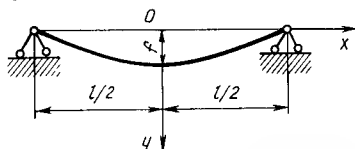


Рис. 11.14. Гибкая полая нить с опорами в разных уровнях, нагруженная произвольной вертикальной нагрузкой

Табл. 11.2. Характеристики кривой провисания гибкой пологой нити



Уравнение кривой провисания	$y = f(1 - 12x/l^2)$	$y = f(1 - (2x/l)^2)$	$y = f \cos(\pi x/l)$
Значение $C/2$	$2f^2/l$	$8f^2/(3l)$	$\pi^2 f^2/(4l)$

Здесь $C/2$ определяют по табл. 11.2: α – коэффициент линейного расширения материала нити; Δt – перепад температур.

Пример 11.9. На пологую гибкую нить с опорами, расположенными в одном уровне, действует равномерно распределенная по всему пролету вертикальная нагрузка $q_1 = 2$ кН/м и нагрузка $q_2 = 4$ кН/м, равномерно распределенная на половине пролета. Пролет нити $l = 100$ м, площадь поперечного сечения $A = 12,5$ см², модуль упругости материала нити $E = 1,6 \cdot 10^5$ МПа.

Характеристика кривой провисания нити при заданном отношении пролета к стрелке провисания $l/f = 17,3$ определена по первой формуле табл. 11.2: $C/2 = 2f^2/l = 0,667$ м.

Характеристика нагрузки определяется по второй схеме прил. 13:

$$D = \frac{q_1^2 l^3}{12} + \frac{q_1 q_2 l^3}{12} + \frac{5 q_2^2 l^3}{192} = 141,7 \cdot 10^3 \text{ кН}^2 \cdot \text{м}.$$

Жесткость нити $EA = 1,6 \cdot 10^5 \cdot 12,5 = 200 \cdot 10^3$ кН.

Натяжение нити определяем из уравнения (11.69), которое принимает вид

$$\frac{H^3}{200 \cdot 10^3} 100 + H^2 \cdot 0,667 = 70,85 \cdot 10^3,$$

откуда $H = 812$ кН.

Если пренебречь разницей между начальной длиной нити L_0 и длиной пролета l , т. е. принять $C = 0$, из формулы (11.70) получим $H = 1123$ кН, что на 30% больше значения, найденного при уточненном расчете.

Многопролетную гибкую упругую нить с шарнирными подвижными промежуточными опорами (рис. 11.15) рассчитывают исходя

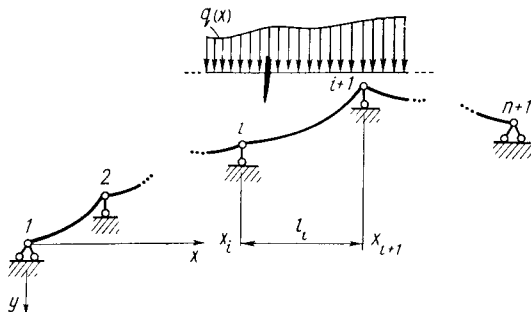


Рис. 11.15. Многопролетная гибкая упругая нить под действием поперечной нагрузки

из условия, что при действии поперечной нагрузки натяжение нити H на всех участках одинаковое [67]. Концевые опоры нити (опоры 1 и $n+1$ на рис. 11.15) считают шарнирно-неподвижными. Номер

каждого пролета l_i определяется номером соответствующей левой опоры пролета.

Натяжение многопролетной нити находят из кубического уравнения [67], коэффициенты которого определяются суммированием соответствующих параметров по всем n пролетам:

$$\frac{H^3}{EA} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1} - x_i}{\cos^3 \varphi_i} + \frac{H^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\cos^3 \varphi_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i = 0, \quad (11.72)$$

где x_i, x_{i+1} — координаты начала и конца пролета; φ_i — угол наклона к оси x прямой, соединяющей начало и конец пролета; C_i — разность между длиной нити в i -м пролете и расстоянием между опорами этого пролета; D_i — характеристика вертикальной нагрузки i -го пролета, определяемая по прил. 13.

Пример 11.10. Определить горизонтальную составляющую усилия в трехпролетной нити [67]. Схема нити и ее загрузка представлены на рис. 11.16; $q_1 = 2$ кН/м; $q_2 = 4$ кН/м. Площадь сечения нити $A = 10$ см², модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Начальная длина нити в первом и третьем пролетах $L_1 = L_3 = 142,421$ м, во втором пролете $L_2 = 100,667$ м.

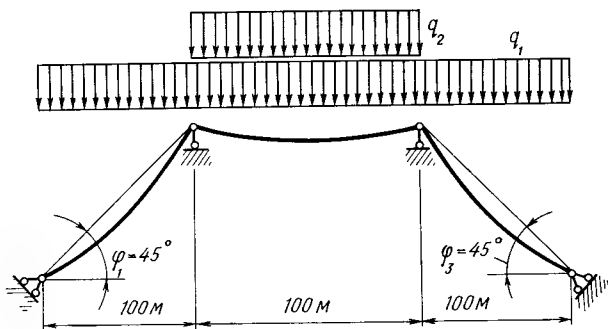


Рис. 11.16. Расчетная схема трехпролетной гибкой нити

Жесткость нити при растяжении $EA = 2 \cdot 10^5 \cdot 10 = 2 \cdot 10^5$ кН. Характеристики нагрузки (по прил. 13): $D_1 = D_3 = q_1^2 l^3 / 12 = 3,3 \cdot 10^5$ кН²·м; $D_2 = (q_1 + q_2)^2 l^3 / 12 = 30 \cdot 10^5$ кН²·м.

Подставляя заданные значения величин в уравнение (11.72), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{H^3}{2 \cdot 10^5} (100 \cdot 2,828 + 100 + 100 \cdot 2,828) + H^2 ((142,421 - 141,421) 2,828 + \\ & + (100,667 - 100,0) + (142,421 - 141,421) 2,828) = \frac{1}{2} (3,3 \cdot 10^5 + 30 \cdot 10^5 + 3,3 \cdot 10^5), \end{aligned}$$

или

$$3,328 \cdot 10^{-3} H^3 + 6,323 H^2 - 18,31 \cdot 10^5 = 0,$$

откуда $H = 480$ кН.

Приближенное решение по типу (11.70), в котором не учитывается разница между начальной длиной нити L_0 и расстоянием между опорами, т. е. при $C = 0$, дает существенно завышенные значения H . В данном примере при $C_i = 0$ получено $H = 817$ кН.

11.5.3. Свободные поперечные колебания гибких нитей

Поперечные колебания гибкой нити описываются функцией $y(x, t)$, график которой дает форму нити в любой фиксированный момент времени t (рис. 11.17). Длина дуги отрезка нити M_1M_2 в этот момент времени

$$S = \int_x^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

При малых колебаниях нити $(dy/dx)^2$ мало по сравнению с единицей, тогда $S \approx x_2 - x_1$ и, следовательно, натяжение нити не зависит от координаты x , т. е. $T(x) = T_0 = \text{const}$.

В соответствии с принципом Д'Аламбера сумма проекций на ось y всех сил, действующих на участке M_1M_2 , включая силы инерции, равна нулю:

$$\int_x^{x_2} \left(T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dx = 0,$$

откуда в связи с произвольностью интервала $[x_1, x_2]$ следует

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Полученное равенство представляет собой уравнение свободных поперечных колебаний гибкой нити, т. е. волновое уравнение, которое имеет следующую каноническую форму:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (11.73)$$

где $a^2 = T_0/(\rho A)$; ρ — плотность материала нити; A — площадь сечения нити.

Гибкая нить представляет собой систему с распределенной массой, имеющую бесконечное число степеней свободы, и характери-

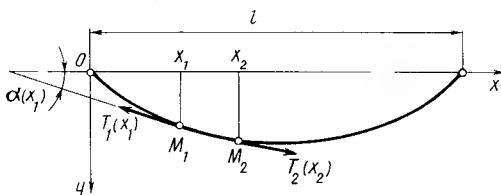


Рис. 11.17. К задаче о поперечных колебаниях гибкой нити

зуется бесконечно большим числом частот ω_k и форм собственных колебаний $X_k(x)$.

Форма собственных колебаний $X_k(x)$ — функция координаты x сечения нити, описывающая ее конфигурацию при гармонических колебаниях с

частотой ω_k . Эти колебания подчиняются закону [63], определяемому решением уравнения (11.73):

$$y(x, t) = X_k(x) T_k(t),$$

где форма собственных колебаний есть функция

$$X_k(x) = C_k \sin(\omega_k x/a) + D_k \cos(\omega_k x/a) \quad (11.74)$$

с постоянными C_k и D_k , зависящими от граничных условий, а функция времени T_k описывается равенством

$$T_k = A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

где амплитуда колебаний A_k и начальная фаза φ_k определяются из начальных условий.

Частоты и формы собственных колебаний нити с конкретным закреплением концов находят из уравнения (11.74) при заданных граничных условиях. Для нити с неподвижно закрепленными концами, согласно условию на левом конце $X_k(0) = 0$, значение постоянной $D_k = 0$.

Из условия на правом конце $X_k(l) = 0$ получается равенство

$$C_k \sin(\omega_k l/a) = 0,$$

или частотное уравнение

$$\sin(\omega_k l/a) = 0.$$

Корни этого уравнения представляют собой частоты (круговые) собственных колебаний гибкой нити

$$\omega_k = k\pi a/l = (k\pi/l) \sqrt{T_0/(\rho A)}, \quad (11.75)$$

которые образуют бесконечный спектр частот $\omega_1 < \omega_2 < \dots$

Форма собственных колебаний в соответствии с (11.74) и (11.75) определяется выражением

$$X_k(x) = C_k \sin(k\pi x/l),$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Первые три формы поперечных колебаний гибкой нити изображены на рис. 11.18.

11.5.4. Свободные поперечные колебания мембраны

Пластина, толщина которой много меньше ее размеров в плане и не сопротивляющаяся изгибу, называется *мембраной*.

В положении равновесия мембрана, равномерно натянутая на контур, занимает в плоскости xOy область D (рис. 11.19), ограниченную замкнутой кривой L . В любом сечении мембраны действует одна и та же сила натяжения $T = \text{const}$.

Произвольный участок (ω) мембраны, ограниченный до деформации плоской кривой l , после деформации представлен участком (ω') , ограниченным пространственной кривой l' .

Выражение для площади участка мембраны (ω') в деформированном состоянии содержит нелинейные члены, а именно квадраты производных перемещений u_x^2 , u_y^2 . При рассмотрении малых колебаний, когда перемещения и их производные малы по сравнению с еди-

ницей, нелинейными членами можно пренебречь. Тогда площадь участка мембраны в деформированном состоянии будет приблизительно равна ее площади до деформации, т. е.

$$\omega' = \iint_{(\omega)} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \approx \iint_{(\omega)} dx dy = \omega,$$

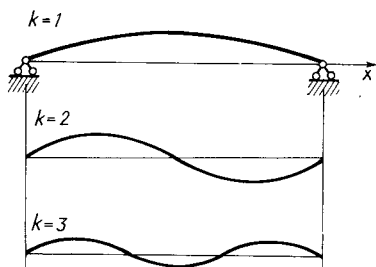


Рис. 11.18. Первые три формы поперечных колебаний гибкой нити

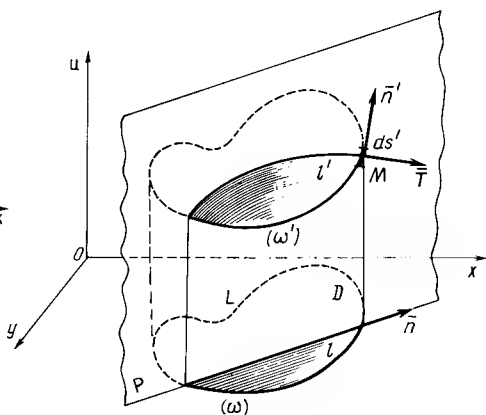


Рис. 11.19. Гибкая мембрана

откуда следует, что любой участок мембраны в деформированном состоянии находится под действием начальных сил натяжения T .

На участок (ω') со стороны остальной части мембраны действуют направленные по нормали к контуру l' равномерно распределенные силы натяжения интенсивности T , лежащие в касательной к поверхности мембраны плоскости, проходящей через точку M . На элемент ds' дуги кривой l' действует сила натяжения Tds' .

Если провести секущую плоскость P через вектор нормали n к кривой l , то в деформированном состоянии мембраны эта плоскость отсечет область (ω') по некоторой кривой. Вектор силы натяжения $\vec{T}$ будет касательным к этой кривой, так как он лежит в касательной плоскости и в плоскости P . Косинус угла, образованного вектором $\vec{T}$ с осью u , равен $\partial u / \partial n$, где n — направление внешней нормали к кривой l .

Отсюда следует, что проекция на ось u сил натяжения, действующих на элемент ds' контура l' , равна $T \frac{\partial u}{\partial n} ds'$, а проекция на ось u всех сил натяжения, приложенных по всему контуру l' , равна интегралу $T \int_{l'} \frac{\partial u}{\partial n} ds'$.

При малых колебаниях, пренебрегая нелинейными членами, можно принять, что $ds' \approx ds$ и в интеграле $l' \approx l$. Тогда на основании формулы Грина проекция на ось u сил натяжения T , действующих

на контуре l' ,

$$T \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint_{(\omega)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (11.76)$$

Пусть к мембране приложена распределенная периодическая нагрузка $p(x, y, t)$, направленная параллельно оси u . Ее равнодействующая

$$F = \iint_{(\omega)} p(x, y, t) dx dy. \quad (11.77)$$

На основании принципа Д'Аламбера силы, определяемые (11.76), (11.77), в любой момент времени t должны уравниваться силами инерции на участке (ω') мембраны:

$$Q = - \iint_{(\omega)} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy, \quad (11.78)$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны.

Приравнивание нулю суммы сил (11.76) — (11.78) дает уравнение движения мембраны:

$$\iint_{(\omega)} \left(T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) - \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки (ω) , а также непрерывности подынтегрального выражения дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t).$$

Для однородной мембраны ($\rho = \text{const}$) это уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (11.79)$$

где $a = \sqrt{T/\rho}$, $f(x, y, t) = p(x, y, t)/\rho$.

Когда отсутствует внешняя нагрузка, т. е. $p(x, y, t) = 0$, (11.79) дает уравнение свободных колебаний мембраны — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (11.80)$$

которое решают одним из известных методов при заданных начальных и граничных условиях.

Пример 11.11. Исследовать свободные колебания прямоугольной мембраны со сторонами c и d , неподвижно закрепленной на контуре [71]. Задача сводится к решению волнового уравнения (11.80) при граничных условиях (рис. 11.20):

$$u|_{x=0} = u|_{x=c} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=d} = 0 \quad (11.81)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \quad (11.82)$$

Частные решения уравнения (11.80) представим в виде

$$u(x, y, t) = v(x, y) T(t). \quad (11.83)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (11.80) получим равенство, правая и левая части которого зависят только от своих аргументов (правая — только от x, y , левая — только от t) и, следовательно, являются постоянными. Обозначим их через $-k^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{1}{v(x, y)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -k^2.$$

Отсюда имеем два уравнения

$$T''(t) + a^2 k^2 T(t) = 0 \quad (11.84)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0 \quad (11.85)$$

Рис. 11.20. К задаче о колебаниях неподвижно закрепленной на контуре прямоугольной мембраны

с граничными условиями в соответствии с (11.81)

$$v|_{x=0} = v|_{x=c} = 0, \quad v|_{y=0} = v|_{y=d} = 0. \quad (11.86)$$

Найдем собственные значения и собственные функции для граничной задачи (11.85), (11.86). Для этого примем

$$v(x, y) = X(x) Y(y). \quad (11.87)$$

Подставляя это выражение в (11.85), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_1^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_2^2 Y(y) = 0,$$

где постоянные k_1^2 и k_2^2 определяются из равенства

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2. \quad (11.88)$$

Общие решения полученных дифференциальных уравнений известны: $X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x$; $Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y$, где постоянные определяются из граничных условий (11.86): $X(0) = X(c) = 0$; $Y(0) = Y(d) = 0$. Отсюда следует, что $C_1 = C_3 = 0$.

Полагая $C_2 = C_4 = 1$, получим

$$X(x) = \sin k_1 x, \quad Y(y) = \sin k_2 y \quad (11.89)$$

и частотные уравнения

$$\sin k_1 c = 0; \quad \sin k_2 d = 0. \quad (11.90)$$

Из этих уравнений вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное множество значений: $k_{1m} = m\pi/c$; $k_{2n} = n\pi/d$ ($m, n = 1, 2, \dots$).

Таким образом, для граничной задачи (11.85), (11.86), учитывая (11.88), получим собственные значения

$$k_{mn}^2 = k_{1m}^2 + k_{2n}^2 = \pi^2 (m^2/c^2 + n^2/d^2), \quad (11.91)$$

которым в силу соотношений (11.87), (11.89) соответствуют собственные функции

$$v_{mn}(x, y) = \sin(m\pi x/c) \sin(n\pi y/d). \quad (11.92)$$

Обращаясь теперь к уравнению (11.84), видим, что для каждого собственного значения $k^2 = k_{mn}^2$ его общее решение

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t, \quad (11.93)$$

где A_{mn} и B_{mn} — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий (11.82).

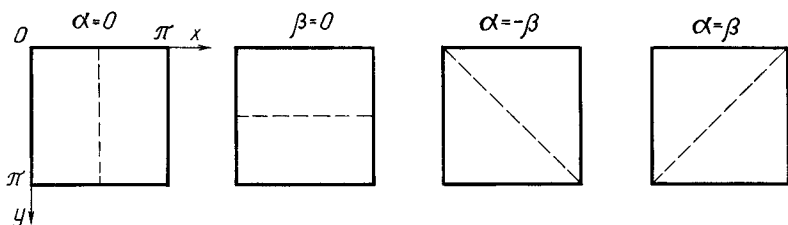


Рис. 11.21. Узловые линии при различных формах колебаний мембраны

В результате частные решения (11.83) волнового уравнения (11.80) с учетом (11.92), (11.93) имеют вид

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos ak_{mn}t + B_{mn} \sin ak_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{d} \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Условиям (11.82) удовлетворяют: $A_{mn} = M_{mn} \sin \varphi_{mn}$; $B_{mn} = M_{mn} \cos \varphi_{mn}$. Тогда решение можно записать в виде

$$u_{mn}(x, y, t) = M_{mn} \sin \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{d} \sin (ak_{mn}t + \varphi_{mn}). \quad (11.94)$$

При каждом значении m, n это выражение дает уравнение стоячей волны, когда точки мембраны совершают гармоническое колебательное движение с частотой $\omega_{mn} = ak_{mn} = a\pi(m^2/c^2 + n^2/d^2)^{1/2}$, или с учетом (11.79)

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{(T/\rho)(m^2/c^2 + n^2/d^2)}. \quad (11.95)$$

При колебаниях прямоугольной мембраны одной и той же частоте могут соответствовать несколько форм изменения поверхности мембраны с различными положениями узловых линий, т. е. линий, вдоль которых амплитуда колебаний равна нулю. Проще всего это можно показать на примере квадратной мембраны с размерами $c = d = l$. В этом случае в соответствии с (11.95) $\omega_{mn} = a(m^2 + n^2)^{1/2}$. Основной тон колебаний по (11.94) при $m = n = 1$

$$u_{11} = M_{11} \sin x \sin y \sin (\omega_{11}t + \varphi_{11}),$$

откуда следует, что узловые линии совпадают с краями мембраны ($x = 0, \pi$; $y = 0, \pi$).

Рассматривая другие формы колебаний, для $m = 1, n = 2$ или $m = 2, n = 1$ из (11.94) имеем два обертона

$$u_{12} = M_{12} \sin x \sin 2y \sin (\omega_{12}t + \varphi_{12}); \quad u_{21} = M_{21} \sin 2x \sin y \sin (\omega_{21}t + \varphi_{21})$$

с одной и той же частотой $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$, но с разной формой изогнутой поверхности мембраны. Узловые линии, при которых амплитуда колебаний равна нулю, определяются для этих форм из уравнения

$$\alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \cos y = 0,$$

или $\alpha \cos y + \beta \cos x = 0$.

Из этого уравнения следует, что расположение узловых линий мембраны зависит от коэффициентов α и β . Для некоторых простейших случаев ($\alpha = 0, \beta = 0, \alpha = -\beta, \alpha = \beta$) узловые линии показаны на рис. 11.21. Для других случаев, когда $\alpha, \beta \neq 0$ и $\alpha \neq \pm \beta$, получаются более сложные линии.

12. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методы оптимизации связаны с практическими задачами выбора оптимального варианта из многих возможных вариантов рассматриваемых объектов. Задачи такого рода возникают, например, при оптимальном проектировании конструкций. Методы оптимизации основаны на математическом программировании — математической дисциплине, посвященной теории нахождения глобальных экстремумов (максимумов или минимумов) некоторой функции многих переменных, которая называется *функцией цели*.

Аргументы функции цели удовлетворяют некоторым условиям, выражаемым в общем случае равенствами и неравенствами, которые называются *системой ограничений*. Если функция цели задана явной формулой и является при этом дифференцируемой, для исследования ее свойств (определения направлений возрастания и убывания, поиска точек локального экстремума) может быть использована производная. Если же она получается в результате сложных расчетов или эксперимента, используют численные методы оптимизации.

12.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.1.1. Задачи линейного программирования

Линейным называется математическое программирование, связанное с определением глобальных экстремумов линейных функций цели при линейной системе ограничений.

Область возможного изменения аргументов функции цели, определяемая системой ограничений, называется *областью допустимых значений аргументов*. В случае линейного программирования областью допустимых значений аргументов будет: при двух аргументах — выпуклый многоугольник; при трех аргументах — выпуклый многогранник; при количестве аргументов $n > 3$ — выпуклый гипермногогранник (по аналогии с $n=2$ и $n=3$).

В математическом программировании глобальный экстремум функции цели может быть внутри или на границе области допустимых значений аргументов. В случае линейного программирования, если глобальный экстремум существует, он имеет место только в вершинах многоугольника, многогранника или гипермногогранника.

Общая формулировка задачи линейного программирования в канонической форме имеет вид: требуется найти глобальный

минимум линейной функции n аргументов (функции цели)

$$\hat{f} = f_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (12.1)$$

при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют следующей совместной (непротиворечивой) неопределенной системе линейных алгебраических уравнений

[illegible]

ранг матрицы которой $r < n$ при естественных ограничениях $x_i \geq 0$. При этом считается, что все $b_k \geq 0$. Неизвестные нумеруются так, чтобы *свободными неизвестными* были первые $p = n - r$ неизвестных. Тогда из (12.2) остальные r неизвестных ($r = n - p$), называемых *базисными*.

$$\left. \begin{aligned} x_{p+1} &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1p}x_p; \\ x_{p+2} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2p}x_p; \\ . &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{p+r} &= \beta_r + \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \dots + \alpha_{rp}x_p. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Система уравнений (12.3) называется *базисной формой системы ограничений*. При замене в (12.1) базисных неизвестных выражениями (12.3) функция цели

$$F = F_0 + \sum_{j=1}^p d_j x_j. \quad (12.4)$$

Формулировка задачи линейного программирования в виде (12.2), (12.4) называется базисной.

Упорядоченная совокупность n величин $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая системе ограничений (12.2) или (12.3), называется допустимым решением или *планом*. Допустимое решение (план), в котором все свободные неизвестные равны нулю, называется допустимым базисным решением или *опорным планом*.

Упорядоченная совокупность n величин $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая системе ограничений (12.2) или (12.3) и дающая глобальный минимум функции цели (12.1) или (12.4), называется *оптимальным решением (оптимальным планом)*. Оптимальный план, если он существует, принадлежит множеству опорных планов.

12.1.2. Симплекс-метод

Метод направленного перебора опорных планов, при котором функция цели все время уменьшается, называется *симплекс-методом*.

В целом при n аргументах функции цели нужно провести не более $2n$ переборов планов. Алгоритм применения симплекс-метода состоит в следующем.

1. Систему ограничений вида (12.2) приводят к базисной форме по правилам линейной алгебры.

2. Полагая в базисной системе уравнений все свободные неизвестные равными нулю, находят значения базисных неизвестных. Если эти значения не отрицательны, исходный первый план является опорным. В противном случае выбирают другие свободные неизвестные таким образом, чтобы исходный план был опорным.

3. В функции цели базисные неизвестные заменяют их выражениями из базисной системы уравнений.

4. Полагая в найденном выражении для функции цели все свободные неизвестные равными нулю, находят значение этой функции, соответствующее выбранному опорному плану.

5. Если все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели не отрицательны, найденный опорный план является оптимальным, а соответствующее значение функции цели будет ее искомым глобальным минимумом.

6. Если среди коэффициентов при свободных неизвестных окажутся отрицательные, нужно выбрать свободную неизвестную с отрицательным коэффициентом, например x_α (обычно это неизвестная с максимальным по модулю отрицательным коэффициентом), и приравнять нулю в базисной системе уравнений все свободные неизвестные, кроме x_α . Определяют максимально возможное значение x_α , при котором все базисные неизвестные неотрицательны.

7. Базисную неизвестную, например x_β , которая обращается в нуль при найденном выше значении x_α , выбирают в качестве свободной неизвестной, а x_α переводят в разряд базисных.

8. Цикл расчетов по пунктам 3—7 повторяют до тех пор, пока опорный план не станет оптимальным, т. е. когда все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели будут положительными.

Изложенный алгоритм симплекс-метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраических уравнений. Простота его делает этот метод весьма удобным для реализации на ЭВМ.

Пример 12.1. Найти с помощью симплекс-метода оптимальную массу плоской фермы при выполнении условий прочности [71]. Статически неопределимая шарнирно-стержневая система (ферма) нагружена силой F (рис. 12.1). Необходимо выбрать

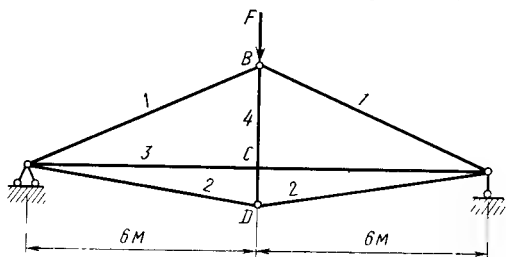


Рис. 12.1. Статически неопределимая ферма

площади поперечных сечений стержней A_i таким образом, чтобы общая масса M фермы была минимальной. Длина стержней: $l_1 = 6,3246$ м; $l_2 = 6,03$ м; $l_3 = 12$ м; $l_4 = 2,6$ м ($BC = 2$ м, $CD = 0,6$ м).

Масса фермы — функция цели

$$M = \rho(12,6492A_1 + 12,06A_2 + 12A_3 + 2,6A_4). \quad (12.5)$$

В (12.5) ρ — плотность материала стержней.

Систему ограничений составим по условиям прочности. Требуется, чтобы во всех стержнях фермы напряжения по абсолютной величине не превосходили расчетного сопротивления материала стержней R , одинакового на растяжение и сжатие: $|N_i/A_i| \leq R$.

Следовательно, система ограничений представляется в виде двух неравенств

$$N_i + RA_i \geq 0; \quad -N_i + RA_i \geq 0, \quad (12.6)$$

где N_i — усилия в стержнях фермы.

Исходя из условий равновесия для узлов фермы, получим три независимых уравнения с четырьмя неизвестными:

$$N_1 = -1,5812N_4 - 1,5812F; \quad N_2 = -5,025N_4; \quad N_3 = 6,5N_4 + 1,5F.$$

Подставляя эти выражения в неравенства (12.6), получаем систему неравенств

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -1,5812N_4 - 1,5812F + RA_1 \geq 0; \\ y_2 &= 1,5812N_4 + 1,5812F + RA_1 \geq 0; \\ y_3 &= -5,025N_4 + RA_2 \geq 0; \quad y_4 = 5,025N_4 + RA_2 \geq 0; \\ y_5 &= 6,5N_4 + 1,5F + RA_3 \geq 0; \\ y_6 &= -6,5N_4 - 1,5F + RA_3 \geq 0; \\ y_7 &= N_4 + RA_4 \geq 0; \quad y_8 = -N_4 + RA_4 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

От (12.7) переходим к системе уравнений, вводя дополнительные неизвестные y_i ($i = 1, 2, \dots, 8$):

$$\left. \begin{aligned} y_1 - RA_1 + 1,5812N_4 &= -1,5812F; \quad y_2 - RA_1 - 1,5812N_4 = 1,5812F; \\ y_3 - RA_2 + 5,025N_4 &= 0; \quad y_4 - RA_2 - 5,025N_4 = 0; \\ y_5 - RA_3 - 6,5N_4 &= 1,5F; \quad y_6 - RA_3 + 6,5N_4 = -1,5F; \\ y_7 - RA_4 - N_4 &= 0; \quad y_8 - RA_4 + N_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Постановка задачи линейного программирования: найти минимум функции цели M при ограничениях (12.8) на ее аргументы (и естественных ограничениях $y_i \geq 0$, $A_i \geq 0$).

Найдем первый опорный план. Ранг матрицы системы (12.8) $r = 8$; следовательно, пять неизвестных будут свободными, а восемь — базисными. За свободные неизвестные примем A_1, A_2, A_3, A_4, N_4 . Уравнения (12.8) представим в виде табл. 12.1, в последней строке которой записано выражение для целевой функции через свободные неизвестные.

Если полученное из первого уравнения (первая строка табл. 12.1) значение $N_4 = (1/1,5812)(RA_1 - y_1) - F$ подставить в остальные уравнения табл. 12.1, придем к системе уравнений, записанной в виде табл. 12.2. Число уравнений и число базисных неизвестных сократилось на единицу, так как переменная y_1 из разряда базисных перешла в разряд свободных.

Если в полученной системе уравнений (табл. 12.2) все свободные неизвестные принять равными нулю, получим первый план

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 5,025F, & -5,025F, & -5F, & 5F, & -F, & F), \end{array}$$

в котором некоторые базисные неизвестные (y_4, y_5, y_7) имеют отрицательные коэффициенты. Следовательно, этот план не является опорным. Поэтому переводом

Табл. 12.1. Исходная система уравнений (12.8)

	A_1	A_2	A_3	A_4	N_4	Правая часть уравнения
y_1	R				$-1,5812$	$-1,5812F$
y_2	R				$1,5812$	$1,5812F$
y_3		R			$-5,025$	0
y_4		R			$5,025$	0
y_5			R		$6,5$	$1,5F$
y_6			R		$-6,5$	$-1,5F$
y_7				R	1	0
y_8				R	-1	0
M	$12,6492$	$12,06$	12	$2,6$	0	0

Табл. 12.2. Первая операция поиска опорного плана

	A_1	A_2	A_3	A_4	y_1	Правая часть уравнения
y_2	$2R$				-1	0
y_3	$\frac{5,025R}{1,5812}$	R			$\frac{5,025}{1,5812}$	$5,025F$
y_4	$\frac{5,025R}{1,5812}$	R			$-\frac{5,025}{1,5812}$	$-5,025F$
y_5	$\frac{6,5R}{1,5812}$		R		$-\frac{6,5}{1,5812}$	$-5F$
y_6	$\frac{6,5R}{1,5812}$		R		$\frac{6,5}{1,5812}$	$5F$
y_7	$\frac{R}{1,5812}$			R	$-\frac{1}{1,5812}$	$-F$
y_8	$\frac{R}{1,5812}$			R	$\frac{1}{1,5812}$	F
M	$12,6492$	$12,06$	12	$2,6$	0	0

базисную переменную y_4 в разряд свободных, а свободную переменную A_2 — в разряд базисных (в табл. 12.2 выделено штриховыми линиями). Получим систему уравнений в виде табл. 12.3 и план

$$A_1 \ y_4 \ A_3 \ A_4 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ A_2 \ y_5 \ y_6 \ y_7 \ y_8$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 10,05F, 5,025 \frac{F}{R}, -5F, 5F, -F, F),$$

в котором также имеются базисные неизвестные с отрицательными коэффициентами — y_5 и y_7 . Следовательно, и этот план также не является опорным. Переменную y_5 переводим в разряд свободных, а свободную переменную A_1 в разряд базисных. В результате получим систему уравнений (табл. 12.4) с планом

$$y_5 \ y_4 \ A_3 \ A_4 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ A_2 \ A_1 \ y_6 \ y_7 \ y_8$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, \frac{15,812}{6,5} F, 2,319F, 1,16F, 1,216 \frac{F}{R}, 0, -0,23F, 0,23F),$$

который также не является опорным, так как содержит базисную переменную y_7 с отрицательным коэффициентом. Эту переменную переводим в разряд свободных, а свободную переменную A_4 — в разряд базисных. Соответствующая система уравнений представлена в табл. 12.5. Полученный теперь план

$$y_5 \quad y_4 \quad A_3 \quad y_7 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad A_2 \quad A_1 \quad y_6 \quad A_4 \quad y_8 \\ (0, 0, 0, 0, 0, \frac{15,812}{6,5} F, 2,319F, 1,16 \frac{F}{R}, 1,216 \frac{F}{R}, 0, 0,23 \frac{F}{R}, 0,46F)$$

Табл. 12.3. Вторая операция поиска опорного плана

	A_1	y_4	A_3	A_4	y_1	Правая часть уравнения
y_2	$2R$				-1	0
y_3	$10,05R$				$10,05$	$10,05F$
	$1,5812$	1			$1,5812$	
A_2	$5,025$	1			$5,025$	$5,025 \frac{F}{R}$
	$1,5812$	$\frac{1}{R}$			$1,5812$	
y_5	$\frac{6,5R}{1,5812}$		R		$-\frac{6,5}{1,5812}$	$-5F$
y_6	$\frac{6,5R}{1,5812}$		R		$\frac{6,5}{1,5812}$	$5F$
y_7	$\frac{R}{1,5812}$			R	$-\frac{1}{1,5812}$	$-F$
y_8	$\frac{R}{1,5812}$			R	$\frac{1}{1,5812}$	F
M	$-25,6771$	$\frac{12,06}{R}$	12	$2,6$	$\frac{38,3263}{R}$	$\frac{60,6015F}{R}$

Табл. 12.4. Третья операция поиска опорного плана

	y_5	y_4	A_3	A_4	y_1	Правая часть уравнения
y_2	$\frac{3,1624}{6,5}$		$-\frac{3,1624R}{6,5}$		1	$\frac{15,812F}{6,5}$
y_3	$10,05$	1	$10,05R$			$2,3192F$
	$6,5$		$6,5$			
A_2	$5,025$	1	$5,025$			$1,1596 \frac{F}{R}$
	$6,5R$	$\frac{1}{R}$	$6,5$			
A_1	$1,5812$		$1,5812$		$\frac{1}{R}$	$1,2163 \frac{F}{R}$
	$6,5R$		$6,5$			
y_6	-1		$2R$			0
y_7	$\frac{1}{6,5}$		$-\frac{R}{6,5}$	R		$-0,2308F$
y_8	$-\frac{1}{6,5}$		$\frac{R}{6,5}$	R		$0,2308F$
M	$-\frac{6,2462}{R}$	$\frac{12,06}{R}$	$18,2462$	$2,6$	$\frac{12,6492}{R}$	$\frac{29,3705F}{R}$

Табл. 12.5. Первый опорный план

	y_5	y_1	A_1	y_7	y_1	Правая часть уравнения
y_2	$\frac{3,1624}{6,5}$		$\frac{3,1624R}{6,5}$		1	$\frac{15,812F}{6,5}$
y_3	$\frac{10,05}{6,5}$	1	$\frac{10,05R}{6,5}$			$2,3192F$
A_2	$\frac{5,025}{6,5R}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{5,025}{6,5}$			$1,1596 \frac{F}{R}$
A_1	$\frac{1,5812}{6,5R}$		$\frac{1,5812}{6,5}$		$\frac{1}{R}$	$1,2163 \frac{F}{R}$
y_6	-1		$2R$			0
A_4	$\frac{1}{6,5R}$		$\frac{1}{6,5}$	$\frac{1}{R}$		$0,23 \frac{F}{R}$
y_8	$\frac{2}{6,5}$		$\frac{2R}{6,5}$	1		$0,46 \frac{F}{R}$
M	$\frac{6,6462}{R}$	$\frac{12,06}{R}$	18,6462	$\frac{2,6}{R}$	$\frac{12,6492}{R}$	$\frac{29,9706F}{R}$

Табл. 12.6. Оптимальный план

	y_6	y_4	A_1	y_7	y_1	Правая часть уравнения
y_2	$\frac{3,1624}{6,5}$					$\frac{15,812F}{6,5}$
y_3	$\frac{10,05}{6,5}$					$2,3192F$
A_2	$\frac{5,025}{6,5R}$					$1,1596 \frac{F}{R}$
A_1	$\frac{1,5812}{6,5R}$					$1,2163 \frac{F}{R}$
y_5	-1		$2R$			0
A_4	$\frac{1}{6,5R}$					$0,2308 \frac{F}{R}$
y_8	$\frac{2}{6,5}$					$0,4616F$
M	$\frac{6,6462}{R}$	$\frac{12,06}{R}$	5,3538	$\frac{2,6}{R}$	$\frac{12,6492}{R}$	$\frac{29,9706F}{R}$

является опорным, но не оптимальным, так как в функции цели (последняя строка табл. 12.5) коэффициент при y_5 отрицателен. Эту свободную переменную переводим в разряд базисных, а переменную y_6 в разряд свободных (отмечено штриховыми линиями в табл. 12.5). В результате получим систему уравнений, приведенную в табл. 12.6, с оптимальным планом

$$y_6 \quad y_7 \quad A_3 \quad y_7 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad A_2 \quad A_1 \quad y_7 \quad A_4 \quad y_8$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, \frac{15,812}{6,5} F, 2,32F, 1,16 \frac{F}{R}, 1,216 \frac{F}{R}, 0, 0,23 \frac{F}{R}, 0,46F).$$

Отсюда следует, что площади поперечных сечений стержней заданной фермы при минимальной ее массе должны быть $A_1=1,2163F/R$; $A_2=1,1596F/R$; $A_3=0$; $A_4=0,2308F/R$, а $M_{\min}=29,97F\rho/R$.

12.2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.2.1. Задачи нелинейного программирования

Математическое программирование называется нелинейным, если функция цели и система ограничений нелинейно зависят от аргументов.

Все задачи нелинейного программирования можно разделить на следующие группы: задачи без системы ограничений; задачи с системой ограничений, выраженной равенствами; задачи с системой ограничений, выраженной неравенствами либо равенствами и неравенствами.

Ограничения в форме неравенств с помощью введения дополнительных неизвестных можно привести к равенствам, поэтому обычно рассматриваются только первые две задачи.

Среди задач нелинейного программирования важное место занимают задачи выпуклого программирования, когда локальный экстремум функции цели является одновременно и глобальным экстремумом.

Наиболее распространенными являются два метода решения задач нелинейного математического программирования без системы ограничений: методы наискорейшего и покоординатного спуска.

12.2.2. Метод наискорейшего спуска (градиентный метод)

Метод $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — некоторая точка области существования функции $f(x, y, z)$, минимум которой требуется найти. Градиентом этой функции в точке M_1 является вектор с проекциями на оси координат в виде частных производных, вычисляемых в точке M_1 : $\frac{\partial f}{\partial x}(M_1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_1)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(M_1)$. Этот вектор указывает направление максимального роста функции $f(x, y, z)$ в точке M_1 . Луч с началом в точке M_1 , целиком лежащий в области существования функции $f(x, y, z)$ и направленный противоположно вектору-градиенту, имеет следующие координаты точек:

$$x = x_1 - t \frac{\partial f}{\partial x}(M_1); \quad y = y_1 - t \frac{\partial f}{\partial y}(M_1); \quad z = z_1 - t \frac{\partial f}{\partial z}(M_1),$$

где $t \geq 0$.

Функция $f(x, y, z)$ в точках этого луча будет сложной функцией одного аргумента t :

$$\varphi(t) = f\left(x_1 - t \frac{\partial f}{\partial x}(M_1), y_1 - t \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), z_1 - t \frac{\partial f}{\partial z}(M_1)\right).$$

Чтобы найти минимум этой функции, нужно получить корни уравнения $\varphi'(t) = 0$. Если t_1 — один из этих корней, можно перейти от точки M_1 к точке M_2 с координатами

$$x_2 = x_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial x}(M_1); \quad y_2 = y_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial y}(M_1); \quad z_2 = z_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial z}(M_1).$$

Далее за исходную принимают точку M_2 и аналогично находят точку M_3 , затем $M_4, M_5, \dots, M_n$. При достаточно большом n точка M_n будет близка к точке искомого минимума функции $f(x, y, z)$.

12.2.3. Метод покоординатного спуска (релаксационный метод)

В этом методе вместо градиента рассматривается вектор, коллинеарный той из осей координат, которая соответствует максимальной по модулю частной производной функции $f(x, y, z)$. Например, если максимальной по модулю производной является $\frac{\partial f}{\partial y}(M_1)$, функция $f(x, y, z)$ в точках луча, направленного противоположно этому вектору, будет сложной функцией $t \geq 0$:

$$\varphi(t) = f\left(x_1, y_1 - t \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), z_1\right).$$

Чтобы найти максимум этой функции, осуществляется переход (спуск) от точки M_1 к другим точкам в направлении, противоположном положительному направлению оси y .

При первом спуске от точки M_1 к точке M_2 последняя будет иметь координаты:

$$x_2 = x_1; \quad y_2 = y_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial y}(M_1); \quad z_2 = z_1.$$

Далее точку M_2 принимают за исходную и осуществляют спуск к точке M_3 и т. д., как в методе наискорейшего спуска.

12.2.4. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа применяют для решения задач нелинейного программирования при наличии системы ограничений, выраженных равенствами.

Пусть требуется найти экстремум функции $f(x, y, z)$ при двух условиях:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (12.9)$$

В силу этих условий переменные y и z можно рассматривать как неявные функции аргумента x . В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ возможного экстремума функции $f(x, y, z)$ ее полный дифференциал равен нулю:

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)dz = 0. \quad (12.10)$$

Дифференцирование условий (12.9) дает

$$\left. \begin{aligned} dF_1(M_0) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0)dz = 0; \\ dF_2(M_0) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0)dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Выражения (12.11) умножают на некоторые постоянные λ_1, λ_2 и полученные результаты прибавляют к (12.10):

$$d\Phi(M_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0)dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0)dz = 0, \quad (12.12)$$

где $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ — функция Лагранжа для $f(x, y, z)$ и условий (12.9).

Постоянные λ_1 и λ_2 в (12.12) называются множителями Лагранжа и выбираются так, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0$.

Тогда в силу (12.11) и условия $dz \neq 0$ $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0) = 0$.

Следовательно, необходимые условия существования экстремума функции $f(x, y, z)$ при учете (12.9) имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0) = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_0) = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_0) = 0, \quad (12.13)$$

что соответствует нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа $\Phi(x, y, z)$.

Пример 12.2. Определить условия экстремума функции Лагранжа при нахождении оптимального объема элемента стержневой конструкции, площадь которого A зависит от некоторой функции проектирования $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, на которую наложено дополнительное ограничение

$$\int_a^b G(x, y(x)) dx = C = \text{const},$$

где $G(x, y(x))$ — кусочно-непрерывная функция аргумента x и функции проектирования $y(x)$; a и b — размеры элемента.

Задачу оптимизации объема V элемента можно сформулировать следующим образом:

$$V = \int_a^b A(x, y(x)) dx \rightarrow \min; \quad (12.14)$$

$$\int_a^b G(x, y(x)) dx = C. \quad (12.15)$$

Для решения задачи (12.14), (12.15) применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа

$$\Phi = \int_a^b (A + \lambda(G - C/(b-a))) dx.$$

Необходимые условия экстремума этой функции:

$$\frac{\partial(A + \lambda G)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(A + \lambda G)}{\partial \lambda} = 0.$$

Отсюда определяется $y(x)$ и затем с помощью (12.15) – множитель λ .

Пример 12.3. Найти оптимальную форму поперечного сечения балки при условии, что в заданном сечении ее прогиб равен допустимому ω_0 . Балка, свободно опертая на концах, загружена произвольной нагрузкой.

Оптимальную форму сечения будем определять исходя из минимального объема балки. Считаем, что площадь поперечного сечения балки A и момент инерции сечения I заданы выражениями:

$$A(x, y(x)) = S_1 y^n(x); \quad I(x, y(x)) = S_2 y^k(x). \quad (12.16)$$

В (12.16) $0 \leq x \leq l$; l – длина балки; S_1, S_2, n, k – некоторые постоянные величины. Например, для балки прямоугольного сечения высотой $h(x)$ $y(x)$ имеем $A = bh(x)$, $I = bh^3(x)/12$ при ширине сечения b .

Пусть M – изгибающий момент в балке от заданной нагрузки, M_1 – момент от единичной силы, приложенной в сечении x . В соответствии с формулой Мора

$$\int_0^l \frac{MM_1}{EI} dx = \omega_0, \quad G(x, y(x)) = \frac{MM_1}{EI}.$$

Функция Лагранжа принимает вид

$$\Phi = \int_0^l (A + \lambda(G/y^k - \omega_0/(b-a))) dx,$$

или

$$\Phi = \int_0^l (S_1 y^n(x) + \lambda(MM_1/(ES_2 y^k(x)) - \omega_0/(b-a))) dx.$$

Искомую функцию изменения высоты сечения балки $y(x)$ найдем из условия $\partial\Phi/\partial y = 0$.

Производная $\partial\Phi/\partial x = 0$, так как определенный интеграл берется по x и после интегрирования функция Φ от x не зависит. Следовательно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = nS_1 y^{n-1}(x) - \frac{\lambda^k k MM_1}{ES_2 y^{k+1}(x)} = 0,$$

откуда $y(x) = \lambda^{1/(n+k)} (kMM_1/(EnS_1S_2))^{1/(n+k)}$.

Подставив это значение $y(x)$ в соотношение $\int_0^l (MM_1/(ES_2 y^k)) dx = \omega_0$, найдем:

$$\int_0^l \frac{MM_1 dx}{ES_2 \lambda^{k/(n+k)} (MM_1 k/(EnS_1S_2))^{k/(n+k)}} = \omega_0;$$

$$\lambda^{n/(n+k)} = \frac{J(EnS_1S_2)^{n/(n+k)}}{\omega_0 k^{k/(n+k)} ES_2}; \quad J = \int_0^l (MM_1)^{n/(n+k)} dx$$

и, следовательно,

$$\lambda = \frac{J^{(n-k)/k} (EnS_1S_2/k)}{(ES_2\omega_0)^{(n+k)/k}}.$$

Таким образом, функция $y(x)$, определяющая оптимальную форму сечения балки, будет иметь вид

$$y(x) = J^{1/k} (ES_2\omega_0)^{-1/k} \left(\frac{EnS_1S_2}{k} \right)^{1/(n+k)} \left(\frac{kMM_1}{EnS_1S_2} \right)^{1/(n+k)},$$

или $y(x) = (J / (ES_2\omega_0))^{1/k} (MM_1)^{1/(n+k)}$.

12.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12.3.1. Основные понятия

По сравнению с другими методами оптимизации геометрическое программирование имеет следующие преимущества: а) метод выявляет достаточно полную картину сравнительной значимости различных параметров задачи; б) при наличии ограничений он более других приспособлен к ЭВМ; в) метод тесно связан с инженерной сутью задачи.

Основное требование метода состоит в том, чтобы все технические характеристики были выражены количественно в виде обобщенных положительных полиномов (позиномов) от регулируемых параметров, т. е. в виде функций специального класса

$$g(t) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^q C_i t_1^{a_{i1}} \dots t_j^a \dots t_m^a,$$

где $C_i \geq 0$ — постоянные коэффициенты; a_{ij} — вещественные числа; $t_j \geq 0$ — искомые переменные; m — число переменных.

Указанное свойство функций позволяет эффективно использовать среднее геометрическое и такие геометрические понятия, как векторные пространства, подпространства, ортогональность и нормализация. В этой связи метод назван геометрическим программированием [24].

Для решения задачи минимизации позинома используется геометрическое неравенство, согласно которому арифметическое среднее не меньше геометрического среднего. Например, $(1/2)u_1 + (1/2)u_2 \geq u_1^{1/2}u_2^{1/2}$, где u_1 и u_2 — неотрицательные числа; или $(1/4)u_1 + (3/4)u_2 \geq u_1^{1/4}u_2^{3/4}$.

Одной из особенностей геометрического программирования является то, что находят не величину A , которая дает минимум или максимум целевой функции $g(z)$, а ее натуральный логарифм, т. е. $z = \ln A$. Вследствие этого функция $g(z)$ с положительными коэффициентами C_i всегда будет выпуклой функцией z . Выпуклость является важнейшим свойством функции $g(z)$, так как позволяет однозначно отождествлять стационарную точку с точкой минимума.

12.3.2. Прямая задача геометрического программирования

Прямая задача геометрического программирования формулируется следующим образом: найти минимум функции цели

$$g_0(t) = \sum_{i=1}^q \prod_j C_i t_j^{a_{ij}} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

при ограничениях

$$g_1(t) = \sum_{i=q_0+1}^q \prod_j C_i t_j^{a_{ij}} \leq 1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$g_k(t) = \sum_{i=q_s}^n \prod_j C_i t_j^{a_{ij}} \leq 1.$$

Здесь k — количество ограничений; $n = \sum_{i=0}^k q_i$ — общее число функций u_i в задаче; q — количество членов в одной функции u_i .

Для решения этой задачи имеется схема, называемая двойственной. Требуется найти

$$\max u(\delta) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right) \prod_{l=1}^k \lambda_l^{\lambda_l} \quad (12.17)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^q \delta_i = 1; \quad \delta_i \geq 0; \quad [a_{ij}] [\delta_i] = 0, \quad (12.18)$$

где $[a_{ij}]$ — матрица показателей; $[\delta_i]$ — двойственный вектор, т. е. вектор, компоненты которого — двойственные переменные; $\lambda_l =$

$= \sum_{i=1}^{q_l} \delta_i$ (сумма по числу членов в каждой функции ограничений).

Двойственные переменные δ_i связаны с переменными прямой задачи следующими соотношениями:

$$\delta_i = u_i / g_0(t) \quad \text{для } i=1, 2, \dots, q_0; \quad \delta_i = \lambda_l u_i \quad \text{для } i=q_0+1, \dots, n. \quad (12.19)$$

При правильной формулировке задачи решение ее заключается в определении двойственного вектора $[\delta_i]$. В общем случае

$$[\delta_i] = \mathbf{b}^{(0)} + \sum_{s=1}^d r_s \mathbf{b}^{(s)} \geq \mathbf{0}, \quad (12.20)$$

где $d = n - m - 1$ — степень трудности задачи; $\mathbf{b}^{(0)}$ — вектор нормализации, удовлетворяющий условиям нормализации и ортогональ-

ности; $\mathbf{b}^{(s)}$ — векторы невязки, представляющие собой линейно независимые решения условий ортогональности; r_s — базисные переменные — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условиям неотрицательности (12.20).

Решаемая задача может быть двух типов. Если $d=0$, это будет элементарно решаемая задача нулевой степени трудности. Для задач такого рода $[\delta_i] = \mathbf{b}^{(0)}$. Вектор $[\delta_i]$ определяют из решения системы уравнений

$$\mathbf{A}[\delta_i] = \bar{\mathbf{E}}, \quad (12.21)$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка $m+1$, первые m строк которой — матрица показателей (12.18), элементы последней строки для q_0 равны единице, а остальные — нулю; $\bar{\mathbf{E}}$ — вектор, нижний элемент которого равен единице, а остальные — нулю.

При $d>0$ трудность решения заключается в том, что оно уже не будет единственным, так как является не вектором, а пространством, в котором находится оптимальный вектор. Практически задача сводится к определению базисных переменных из системы нелинейных уравнений

$$\prod_{i=1}^n C_i^{b_i^{(s)}} = \left(\prod_{i=1}^n \delta_i^{b_i^{(s)}}(r) \right) \prod_{l=1}^k \lambda_l^{\lambda_l^{(s)}}(r).$$

Пример 12.4. Определить минимальный объем сборного железобетонного перекрытия, состоящего из балок и плит, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 12.2). Балки расположены вдоль короткого пролета. По ним уложен настил из плит, работающих на изгиб как балки пролетом a . Допустимые напряжения для плит и балок одинаковы и равны σ_{adm} . Требуется определить минимальный объем перекрытия исходя из условий прочности по максимальному изгибающему моменту в середине пролета плит и балок.

За функцию цели принимаем объем перекрытия

$$g_0 = Llh + BHLN,$$

где N — количество балок (две крайние принимаются за одну), остальные обозначения приняты по рис. 12.2.

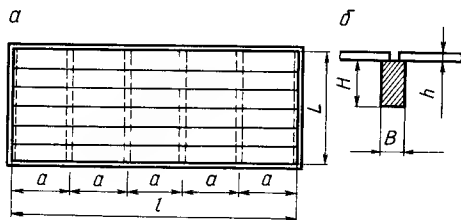


Рис. 12.2. Сборное железобетонное перекрытие:

a — схема перекрытия, b — сечение по балке

При соотношении между шириной и высотой поперечного сечения балок $B = \alpha H$, где $\alpha < 1$, объем перекрытия

$$g_0 = Llh + \alpha H^2 LN = u_1 + u_2.$$

Ограничения по прочности: для плит $\sigma_{adm} \geq M_{пл}/W_{пл}$, где $M_{пл} = q_{пл}a^2/8$, $a = l/N$, $q_{пл} = qL$, $W_{пл} = Lh^3/6$, т. е. $\sigma_{adm} \geq 3ql^2/(4h^2N^2)$; для балок $\sigma_{adm} \geq M_6/W_6$, где $M_6 = q_6L^2/8$, $q_6 = ql/N$, $W_6 = BH^3/6 = \alpha H^3/6$, т. е. $\sigma_{adm} \geq 3qlL^2/(4N\alpha H^3)$.

Запишем формулировку задачи в терминах геометрического программирования. Требуется найти минимум функции цели

$$\min g_0(t) = C_1 t_1 + C_2 t_2^3$$

($t_1 = h$, $t_2 = H$, $t_3 = N$ — переменные, а $C_1 = Ll$, $C_2 = \alpha L$ — постоянные) при ограничениях

$$q_1(t) = C_3 t_1^{-2} t_3^{-2} = u_3, \quad g_2(t) = C_4 t_2^{-3} t_3^{-1} = u_4,$$

где $C_3 = 3ql^2/(4\sigma_{adm})$, $C_4 = 3qlL^2/(4\alpha\sigma_{adm})$ — постоянные.

Здесь число переменных $m=3$, а число функций задачи $n=4$. Следовательно, степень трудности задачи $d=4-3-1=0$. Число функций, входящих в $g_0(t)$, две. Число ограничений $k=2$.

Для определения двойственного вектора $[\delta_i]$ используем уравнения (12.21):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [\delta_i] = \begin{bmatrix} 0,250 \\ 0,750 \\ 0,125 \\ 0,500 \end{bmatrix}. \quad (12.22)$$

Найдем решение задачи при $l=20$ м; $L=10$ м; $q=0,05$ МПа; $\sigma_{adm}=100$ МПа; $\alpha=0,3$.

Определяем постоянные $C_1=10 \cdot 20=200$; $C_3=3 \cdot 500 \cdot 20^2/(4 \cdot 10^6)=0,15$; $C_2=0,3 \cdot 10=3$; $C_4=3 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10^2/(4 \cdot 0,3 \cdot 10^6)=2,5$ и находим минимальный объем перекрытия, используя выражение (12.17):

$$\min g_0(t) = \max u(\delta) = 18,763.$$

Для определения переменных (высоты плиты $h=t_1$, высоты балки $H=t_2$ и количества балок $N=t_3$) используем соотношения (12.19) и (12.22):

$$0,25 = \frac{C_1 t_1}{18,763}, \quad \text{откуда } t_1 = \frac{0,25 \cdot 18,763}{200} = 0,0235 \text{ м};$$

для определения t_3 — второе выражение из (12.19):

$$0,125 = 0,125 C_3 t_1^{-2} t_3^{-2}, \quad \text{откуда } t_3 = \frac{\sqrt{C_3}}{t_1} = \frac{\sqrt{0,15}}{0,0235} = 16,48.$$

Так как $t_3=N$ — целое число, принимаем $N=17$.

Значение t_2 определяем из первого выражения (12.19):

$$0,75 = C_2 t_2^3 / 18,763, \quad \text{откуда } t_2 = \sqrt[3]{0,75 \cdot 18,763 / (3 \cdot 17)} = 0,525 \text{ м}.$$

По условиям прочности уточним высоту плиты

$$h = \sqrt[3]{3ql^2/(4\sigma_{adm}N^2)} = \sqrt[3]{3 \cdot 500 \cdot 20^2/(4 \cdot 10^6 \cdot 17^2)} = 0,0228 \text{ м},$$

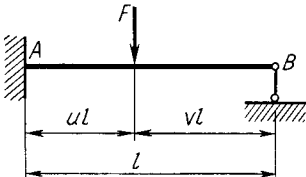
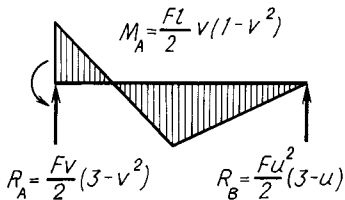
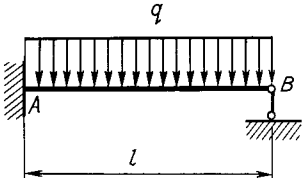
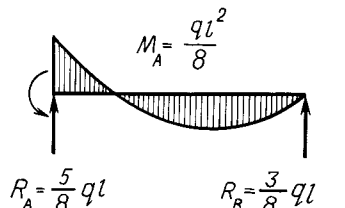
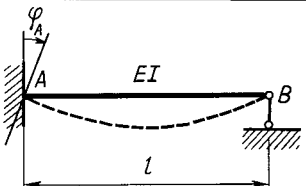
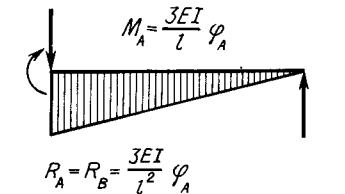
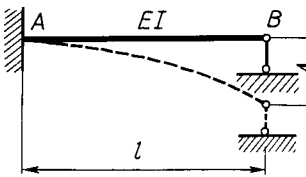
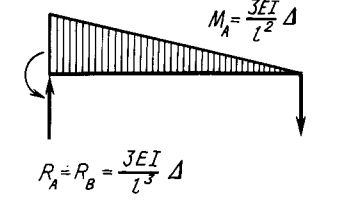
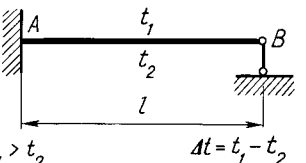
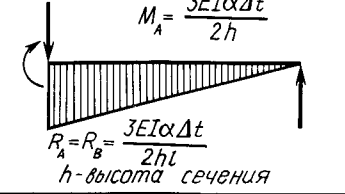
а также высоту балки

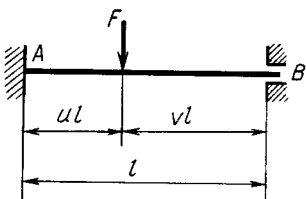
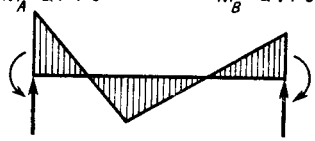
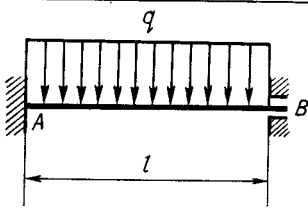
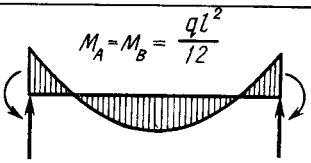
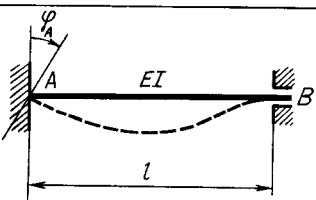
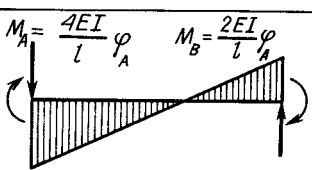
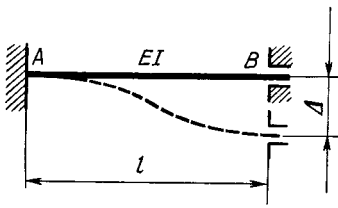
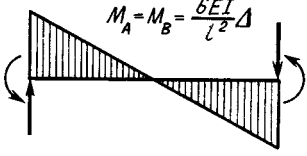
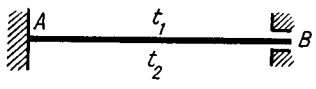
$$H = \sqrt[3]{3qlL^2/(4\sigma_{adm}\alpha N)} = \sqrt[3]{3 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10^2/(4 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 17)} = 0,5278 \text{ м}.$$

Рассмотренный пример является всего лишь элементарной иллюстрацией применения метода геометрического программирования к задачам оптимального проектирования. Аппарат этого метода позволяет решать широкий круг задач не только строительной механики и проектирования конструкций, но и многих задач технологических, управления производством и др. Главное достоинство метода — оперативное получение результатов на базе применения вычислительной техники.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Реакции балок постоянного сечения при воздействии внешних сил, неравномерной осадке опор и неравномерном нагреве

Номер схемы	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры моментов и реакции
1	2	3
1		 $M_A = \frac{Fl}{2} \frac{v}{1-v^2}$ $R_A = \frac{Fv}{2} (3-v^2) \quad R_B = \frac{Fv}{2} (3-u)$
2		 $M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} ql \quad R_B = \frac{3}{8} ql$
3		 $M_A = \frac{3EI}{l} \varphi_A$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2} \varphi_A$
4		 $M_A = \frac{3EI}{l^2} \Delta$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3} \Delta$
5	Неравномерный нагрев  $t_1 > t_2$ $\Delta t = t_1 - t_2$	 $M_A = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$ $R_A = R_B = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$ h — высота сечения

1	2	3
6		$M_A = ul^2 Fl$ $M_B = vl^2 Fl$  $R_A = v^2(1+2u)F$ $R_B = u^2(1+2v)F$
7		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$  $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$
8		$M_A = \frac{4EI}{l} \varphi_A$ $M_B = \frac{2EI}{l} \varphi_A$  $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2} \varphi_A$
9		$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2} \Delta$  $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3} \Delta$
10	Неравномерный нагрев  $t_1 > t_2$ $\Delta t = t_1 - t_2$	$M_A = M_B = \frac{EI\alpha\Delta t}{h}$  $R_A = R_B = 0$ <i>h</i> - высота сечения

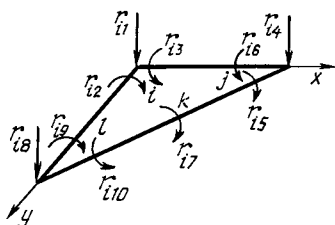
3. Матрица реакций упругого основания для прямоугольного конечного элемента плиты

1727	461a	461b	613	137a	199b	197	29a	29b	613	199a	137b
2520	5040	5040	2520	2520	5040	2520	29a	1260	2520	5040	2520
	a^2	ab	137a	a^2	ab	29a	a^2	ab	199a	a^2	ab
	63	80	2520	84	120	1260	168	180	5040	126	120
		b^2	199b	ab	b^2	29b	ab	b^2	137b	ab	b^2
		63	5040	120	126	1260	180	168	2520	120	84
			1724	461a	461b	613	199a	137b	197	29a	29b
			2520	5040	5040	2520	5040	2520	2520	1260	1260
			a^2	ab	ab	199a	a^2	ab	29a	a^2	ab
			63	80	b^2	5040	126	120	1260	163	180
						137b	ab	b^2	29b	ab	b^2
					63	2520	120	84	1260	180	168
						1727	461a	461b	613	137a	199b
						2520	5040	5040	2520	2520	5040
							a^2	ab	137a	a^2	ab
							63	80	2520	84	120
								b^2	199b	ab	b^2
								63	5040	120	126
									1727	461a	461b
									2520	5040	5040
										a^2	ab
										63	80
											b^2
											63

(Симметрично)

Общий множитель $kab/5$. $p =$

4. Элементы матрицы жесткости конечного элемента плиты в форме прямоугольного треугольника (см. рис. 6.15)



$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \frac{6mD_x}{a^2} + \frac{6D_y}{mb^2} + \frac{12D_v}{ab} + \frac{12D_k}{ab}; \\
 r_{12} &= \frac{mD_x}{a} + \frac{D_y}{m^2b} + \frac{2D_v}{b} + \frac{2D_k}{b}; \\
 r_{13} &= \frac{m^2D_x}{a} + \frac{D_y}{mb} + \frac{2D_v}{a} + \frac{2D_k}{a}; \\
 r_{14} &= -\frac{6mc^2D_x}{a^2} - \frac{6c^2D_y}{mb^2} - \frac{12c^2D_v}{ab} - \frac{12c^2D_k}{ab}; \\
 r_{15} &= \frac{mD_x}{a}(1+c^2) + \frac{c^2D_y}{m^2b} + \frac{D_v}{b}(1+2c^2) + \frac{2c^2D_k}{b}; \\
 r_{16} &= -\frac{m^2c^2D_x}{a} - \frac{D_y}{mb}(1+c^2) - \frac{D_v}{a}(1+2c^2) - \frac{2c^2D_k}{a}; \\
 r_{17} &= \frac{4mcD_x}{a} + \frac{4cD_y}{m^2b} + \frac{8cD_v}{b} + \frac{8cD_k}{b}; \\
 r_{18} &= -\frac{6ms^2D_x}{a^2} - \frac{6s^2D_y}{mb^2} - \frac{12s^2D_v}{ab} - \frac{12s^2D_k}{ab}; \\
 r_{19} &= -\frac{mD_x}{a}(1+s^2) - \frac{s^2D_y}{m^2b} - \frac{D_v}{b}(1+2s^2) - \frac{2s^2D_k}{b}; \\
 r_{110} &= \frac{m^2s^2D_x}{a} + \frac{D_y}{mb}(1+s^2) + \frac{D_v}{a}(1+2s^2) + \frac{2s^2D_k}{a}; \\
 r_{22} &= mD_x + \frac{D_y}{3m^3} + \frac{2D_k}{3m}; \quad r_{23} = -\frac{m^2D_x}{6} - \frac{D_y}{6m^2} + D_v + \frac{D_k}{3}; \\
 r_{24} &= -\frac{mD_x}{a}(1+s^2) - \frac{2c^2D_y}{m^2b} - \frac{c^2D_v}{b} - \frac{2c^2D_k}{b}; \\
 r_{25} &= \frac{mD_x}{6}(3+s^2) + \frac{c^2D_y}{3m^3} + \frac{D_v}{6m}(2+c^2) + \frac{c^2D_k}{3m}; \\
 r_{26} &= \frac{m^2c^2D_x}{6} - \frac{D_y}{3m^2}(1+c^2) - \frac{c^2D_v}{6} - \frac{c^2D_k}{3}; \\
 r_{27} &= -\frac{2m^2sD_x}{3} + \frac{4sD_y}{3m^2} + \frac{2sD_v}{3} + \frac{4sD_k}{3}; \\
 r_{28} &= \frac{ms^2D_x}{a} + \frac{D_y}{m^2b}(1-2s^2) - \frac{D_v}{b}(1+s^2); \\
 r_{29} &= \frac{mD_x}{6}(1+s^2) - \frac{s^2D_y}{3m^3} - \frac{D_v}{6m}(1+s^2) - \frac{D_k}{3m}(1+s^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{210} &= -\frac{m^2 s^2 D_x}{6} - \frac{D_y}{6m^2} (1-2s^2) + \frac{D_v}{6} (1+s^2) + \frac{s^2 D_k}{3}; \\
r_{33} &= \frac{m^3 D_x}{3} + \frac{D_y}{m} + \frac{2m D_k}{3}; \\
r_{34} &= \frac{m^2 D_x}{a} (1-2c^2) + \frac{c^2 D_y}{mb} - \frac{D_v}{a} (1+c^2) - \frac{2c^2 D_k}{a}; \\
r_{35} &= -\frac{m^2 D_x}{6} (1-2c^2) - \frac{c^2 D_y}{6m^2} + \frac{D_v}{6} (1+c^2) + \frac{c^2 D_k}{3}; \\
r_{36} &= -\frac{m^3 c^2 D_x}{3} + \frac{D_y}{6m} (1+c^2) - \frac{m D_v}{6} (1+c^2) - \frac{m D_k}{3} (1+c^2); \\
r_{37} &= \frac{4m^2 c D_x}{3} - \frac{2c D_y}{3m^2} + \frac{2c D_v}{3} + \frac{4c D_k}{3}; \\
r_{38} &= -\frac{2m^2 s^2 D_x}{a} - \frac{D_y}{mb} (1+c^2) - \frac{s^2 D_v}{a} - \frac{2s^2 D_k}{a}; \\
r_{39} &= -\frac{m^2 D_x}{3} (1+s^2) + \frac{s^2 D_y}{6m^2} - \frac{s^2 D_v}{6} - \frac{s^2 D_k}{3}; \\
r_{310} &= \frac{m^3 s^2 D_x}{3} + \frac{D_y}{6m} (3+c^2) + \frac{m D_v}{6} (2+s^2) + \frac{m s^2 D_k}{3}; \\
r_{44} &= \frac{6m D_x}{a^2} (1-2c^2 s^2) + \frac{12c^4 D_y}{mb^2} + \frac{12c^4 D_v}{ab} + \frac{12c^4 D_k}{ab}; \\
r_{45} &= -\frac{2m D_x}{a} (1-c^2 s^2) - \frac{2c^4 D_y}{m^2 b} - \frac{2c^2 D_v}{b} (1+c^2) - \frac{2c^4 D_k}{b}; \\
r_{46} &= -\frac{m^2 c^2 D_x}{a} (1-2c^2) + \frac{2c^2 D_y}{mb} (1+c^2) + \frac{c^2 D_v}{a} (1+2c^2) + \frac{2c^4 D_k}{a}; \\
r_{47} &= \frac{4mc D_x}{a} (1-2c^2) - \frac{8c^3 D_y}{m^2 b} - \frac{8c^3 D_v}{b} - \frac{8c^3 D_k}{b}; \\
r_{48} &= -\frac{6ms^2 D_x}{a^2} (1-2c^2) - \frac{6c^2 D_y}{mb^2} (1-2s^2) + \frac{12c^2 s^2 D_v}{ab} + \frac{12c^2 s^2 D_k}{ab}; \\
r_{49} &= \frac{m D_x}{a} (c^2-2s^4) + \frac{2c^2 s^2 D_y}{m^2 b} + \frac{c^2 D_v}{b} (1+2s^2) + \frac{2c^2 s^2 D_k}{b}; \\
r_{410} &= \frac{m^2 s^2 D_x}{a} (1-2c^2) + \frac{c^2 D_y}{mb} (1-2s^2) + \frac{D_v}{a} (1-4c^2+2c^4) - \frac{2c^2 s^2 D_k}{a}; \\
r_{55} &= \frac{m D_x}{3} (3-c^2 s^2) + \frac{c^4 D_y}{3m^3} + \frac{c^2 D_v}{3m} (2+c^2) + \frac{c^4 D_k}{3m}; \\
r_{56} &= \frac{m^2 c^2 D_x}{6} (1-2c^2) - \frac{c^2 D_y}{3m^2} (1+c^2) - \frac{D_v}{6} (2+3c^2+2c^4) - \frac{c^4 D_k}{3}; \\
r_{57} &= -\frac{2mc D_x}{3} (1-2c^2) + \frac{4c^3 D_y}{3m^3} + \frac{4c D_v}{3m} (1+c^2) + \frac{4c^3 D_k}{3m}; \\
r_{58} &= \frac{ms^2 D_x}{a} (1-2c^2) + \frac{c^2 D_y}{m^2 b} (1-2s^2) + \frac{D_v}{b} (1-4s^2+2s^4) - \frac{2c^2 s^2 D_k}{b}; \\
r_{59} &= -\frac{m D_x}{6} (c^2-2s^4) - \frac{c^2 s^2 D_y}{3m^3} - \frac{D_v}{6m} (1+3s^2-2s^4) - \frac{c^2 s^2 D_k}{3m}; \\
r_{510} &= -\frac{m^2 s^2 D_x}{6} (1-2c^2) + \frac{c^2 D_y}{6m^2} (1-2c^2) - \frac{D_v}{6} (1-2c^2 s^2) + \frac{c^2 s^2 D_k}{3}; \\
r_{66} &= \frac{m^3 c^4 D_x}{3} + \frac{D_y}{3m} (1+c^2)^2 + \frac{mc^2 D_v}{3} (1+c^2) + \frac{m D_k}{3} (1+c^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{67} &= -\frac{4m^2c^3D_x}{3} - \frac{4cD_y}{3m^2}(1+c^2) - \frac{2cD_v}{3}(1+2c^2) - \frac{4c^3D_k}{3}; \\
r_{68} &= \frac{2m^2c^2s^2D_x}{a} + \frac{D_y}{mb}(s^2-2c^4) + \frac{s^2D_v}{a}(1+2c^2) + \frac{2c^2s^2D_k}{a}; \\
r_{69} &= \frac{m^2c^2D_x}{3}(1+s^2) + \frac{s^2D_y}{3m^2}(1+c^2) + \frac{D_v}{3}(1+c^2s^2) + \frac{c^2s^2D_k}{3}; \\
r_{610} &= -\frac{m^3c^2s^2D_x}{3} - \frac{D_y}{6m}(s^2-2c^4) - \frac{mD_v}{6}(1+3c^2-2c^4) - \frac{mc^2s^2D_k}{3}; \\
r_{77} &= \frac{16m^3c^2D_x}{3} + \frac{16c^2D_y}{3m^3} + \frac{16csD_v}{3} + \frac{16csD_k}{3}; \\
r_{78} &= -\frac{8m^2s^3D_x}{a} + \frac{4sD_y}{mb}(1-2s^2) - \frac{8s^3D_v}{a} - \frac{8s^3D_k}{a}; \\
r_{79} &= -\frac{4m^2sD_x}{3}(1+s^2) - \frac{4s^3D_y}{3m^2} - \frac{2sD_v}{3}(1+2s^2) - \frac{4s^3D_k}{3}; \\
r_{710} &= \frac{4m^3s^3D_x}{3} + \frac{2sD_y}{3m}(1-2c^2) + \frac{4msD_v}{3}(1+s^2) + \frac{4ms^3D_k}{3}; \\
r_{88} &= \frac{12ms^4D_x}{a^2} + \frac{6D_y}{mb^2}(1-2c^2s^2) + \frac{12s^4D_v}{ab} + \frac{12s^4D_k}{ab}; \\
r_{89} &= \frac{2ms^2D_x}{a}(1+s^2) - \frac{s^2D_y}{m^2b}(1-2s^2) + \frac{s^2D_v}{b}(1+2s^2) + \frac{2s^4D_k}{b}; \\
r_{810} &= -\frac{2m^2s^4D_x}{a} - \frac{2D_y}{mb}(c^2+s^4) - \frac{2s^2D_v}{a}(1+s^2) - \frac{2s^4D_k}{a}; \\
r_{99} &= \frac{mD_x}{3}(1+s^2)^2 + \frac{s^4D_y}{3m^3} + \frac{s^2D_v}{3m}(1+s^2) + \frac{D_k}{3m}(1+s^4); \\
r_{910} &= -\frac{m^2s^2D_x}{3}(1+s^2) + \frac{s^2D_y}{6m^2}(1-2s^2) - \frac{D_v}{6}(2+3s^2+2s^4) - \frac{s^4D_k}{3}; \\
r_{1010} &= \frac{m^2s^4D_x}{3} + \frac{D_y}{3m}(3-c^2s^2) + \frac{ms^2D_v}{3}(2+s^2) + \frac{ms^4D_k}{3}.
\end{aligned}$$

5. К определению изгибающих моментов в конечном элементе в форме прямоугольного треугольника (правило знаков такое же, как для прямоугольного элемента)

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ M'_x \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_y \\ M'_y \\ M^k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xv} & 2D_{xa} & 2D_{vb} & -\frac{3D_{xa}}{a} & D_{xa} & 0 & 0 & -\frac{3D_{vb}}{b} & 0 & D_{vb} \\ -D_{xv} & D_{22} & 0 & D_{24} & D_{25} & D_{26} & -4D_{vb} & D_{28} & \frac{aD_{vb}S^2}{b} & D_{vb}C^2 \\ D_{31} & 0 & D_{33} & D_{34} & D_{35} & \frac{bD_{xa}C^2}{a} & -4D_{xa}C & D_{38} & D_{39} & D_{310} \\ D_{yv} & 2D_{va} & 2D_{yb} & -\frac{3D_{va}}{a} & D_{va} & 0 & 0 & -\frac{3D_{yb}}{b} & 0 & D_{yb} \\ -D_{yv} & D_{52} & 0 & D_{54} & D_{55} & D_{56} & -4D_{yb}S & D_{58} & \frac{aD_{yb}S^2}{b} & D_{yb}C^2 \\ -D_{yv} & 0 & D_{63} & D_{64} & D_{va}S^2 & \frac{bD_{va}C^2}{a} & -4D_{va}C & D_{68} & D_{69} & D_{610} \\ -\frac{6D_k}{ab} & -\frac{D_k}{b} & -\frac{D_k}{a} & \frac{6D_kC^2}{ab} & -\frac{D_kC^2}{b} & \frac{D_kC^2}{a} & -\frac{4D_kC}{b} & \frac{6D_kS^2}{ab} & \frac{D_kS^2}{b} & -\frac{D_kS^2}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Z_i}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial y} \\ \frac{Z_i}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial x}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial y}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial Z_k}{\partial n} \\ \frac{Z_i}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

6. Матрица жесткости квадратной плиты при коэффициенте поперечной деформации, равном нулю

$$K = \begin{bmatrix} 10,8/a^2 & 2,2/a & 2,2/a & -4,8/a^2 & 2,2/a & 0,8/a & -1,2/a^2 & 0,8/a & 0,8/a & -4,8/a^2 & 0,8/a & 2,2/a \\ & 1,6 & 0 & -2,2/a & 0,6 & 0 & -0,8/a & 0,4 & 0 & 0,8/a & 0,4 & 0 \\ & & 1,6 & 0,8/a & 0 & 0,4 & -0,8/a & 0 & 0,4 & -2,2/a & 0 & 0,6 \\ & & & 10,8/a^2 & -2,2a & 2,2/a & -4,8/a^2 & -0,8/a & 2,2/a & -1,2/a^2 & -0,8/a & 0,8/a \\ & & & & 1,6 & 0 & -0,8/a & 0,4 & 0 & 0,8/a & 0,4 & 0 \\ & & & & & 1,6 & -2,2/a & 0 & 0,6 & -0,8/a & 0 & 0,4 \\ & & & & & & 10,8/a^2 & -2,2/a & -2,2/a & -4,8/a^2 & -2,2/a & -0,8/a \\ & & & & & & & 1,6 & 0 & 2,2/a & 0,6 & 0 \\ & & & & & & & & 1,6 & -0,8/a & 0 & 0,4 \\ & & & & & & & & & 10,8/a^2 & 2,2/a & -2,2/a \\ & & & & & & & & & & 1,6 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 1,6 \end{bmatrix}$$

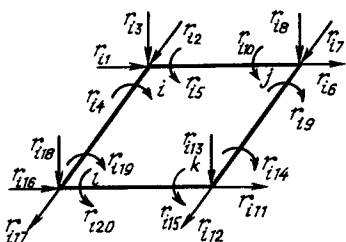
(Симметрично)

Общий множитель $D = Eh^3/12$.

$KZ = R_0$, где $R_0^* = [0, 9qa^2 \ 0 \ 0 \ qa^2 \ 0 \ 0 \ 0, 9qa^2 \ 0 \ 0 \ 0, 9qa^2 \ 0 \ 0 \ qa^2]$ — столбец свободных членов; Z — столбец основных неизвестных; K — матрица жесткости плиты:

$56,4/a^2$	$-1,8/a$	$-1,8/a$	$-9,6/a^2$	$4,4/a$	0	0	0	$-2,4/a^2$	$-1,6/a$	0	$-9,6/a^2$
$-1,8/a$	6,8	0	$-4,4/a$	1,2	0	0	0	0	0	0	0
$-1,8/a$	0	6,8	0	0	0,8	0	0	$-1,6/a$	0	0	$-4,4/a$
$-9,6/a^2$	$-4,4/a$	0	$43,2/a^2$	0	0	$-9,6/a^2$	$4,4/a$	0	$-9,6/a^2$	$-4,4/a$	$-1,2/a^2$
$4,4/a$	1,2	0	0	6,4	0	$-4,4/a$	1,2	0	$-0,8$	0	$0,8/a$
0	0	0,8	0	0	6,4	0	0	$-4,4/a$	0	$-1,2$	$-0,8/a$
0	0	0	$-9,6/a^2$	$-4,4/a$	0	$56,4/a^2$	$1,8/a$	$1,8/a$	$0,8/a$	$-0,8/a$	0
0	0	0	$4,4/a$	1,2	0	$1,8/a$	6,8	0	$0,8/a$	0	0
0	0	0	0	0	0,8	$1,8/a$	0	$-0,8/a$	0	$-0,4$	0
$-2,4/a^2$	0	$-1,6a$	$-9,6/a^2$	0	$-4,4/a$	$-1,2/a^2$	$0,8/a$	$-0,8/a$	$-1,8/a$	$-1,8/a$	$-9,6/a^2$
$-1,6/a$	0	0	0	$-0,8$	0	$0,8/a$	$-0,4$	$-1,8/a$	6,8	0	$-4,4/a$
0	0	0	$-4,4/a$	0	$-1,2$	$-0,8/a$	0	$-1,8/a$	0	6,8	0
$-19,2/a^2$	0	$-8,8/a$	$-2,4/a^2$	$1,6/a$	$-1,6/a$	0	0	$-19,2/a^2$	$-8,8/a$	0	$43,2/a^2$

8. Элементы матрицы жесткости прямоугольной плиты с ребрами по контуру ($i=1, 2, \dots, 20$)



$$r_{11} = -r_{16} = r_{66} = B_i/a; \quad r_{13} = -r_{316} = B_v z_l / (2b) - B z_{il} / (2b); \quad r_{14} = r_{69} = -D_i/a - B z_l / (4m); \\ r_{15} = r_{120} = -r_{516} = -r_{1620} = z_l (B_v - B) / 4; \quad r_{18} = -r_{816} = B_v z_l / (2b) + B z_{il} / (2b); \quad r_{19} = r_{46} = D_i/a - B z_l / (4m); \quad r_{110} = r_{115} = -r_{1016} = -r_{1516} = z_l (B_v + B) / 4; \\ r_{113} = -r_{1316} = -B_v z_l / (2b) - B z_{kl} / (2b); \quad r_{114} = r_{119} = r_{614} = r_{619} = B z_k / (4m); \quad r_{118} = -r_{1618} = -B_v z_l / (2b) + B z_{kl} / (2b).$$

$$r_{22} = -r_{217} = r_{1717} = B_l/b; \quad r_{23} = -r_{37} = B_v z_l / (2a) - B z_{il} / (2a); \quad r_{24} = r_{29} = -r_{47} = -r_{79} = z_l (B_v - B) / 4; \\ r_{25} = r_{1720} = -D_l/b - m B z_l / 4; \quad r_{28} = -r_{78} = -B_v z_l / (2a) + B z_{il} / (2a); \quad r_{210} = r_{215} = r_{1017} = r_{1517} = m B z_l / 4; \quad r_{213} = -r_{713} = -B_v z_k / (2a) - B z_{kl} / (2a); \\ r_{214} = r_{219} = -r_{714} = -r_{719} = z_k (B_v + B) / 4; \quad r_{218} = -r_{718} = B_v z_k / (2a) + B z_{kl} / (2a); \quad r_{220} = r_{517} = D_l/h - m B z_l / 4.$$

$$r_{33} = 12C_i/a^3 + 12C_l/b^3 + 2B_v z_l z_i / (ab) + B z_{il}^2 / (ab); \quad r_{34} = r_{39} = 6C_i/a^2 + B_v z_l z_i / (2b) + B z_{il} z_i / (2b); \\ r_{35} = r_{320} = 6C_l/b^2 + B_v z_l z_i / (2a) + B z_{il} / (2a); \quad r_{36} = -r_{311} = -B_v z_l / (2b) - B z_{il} / (2b); \quad r_{38} = -12C_i/a^3 + 2B_y z_l z_i / (mb^2) - B_v z_l z_i / (ab) - B z_{il} z_i / (ab); \\ r_{310} = r_{315} = B_y z_l z_i / (mb) - B_v z_l z_i / (2a) - B z_{il} z_i / (2a); \quad r_{312} = -r_{317} = B_v z_l / (2a) + B z_{il} / (2a); \quad r_{313} = -2m B_x z_l z_k / a^2 - 2B_y z_l z_i / (mb^2) + B_v (z_l z_i + z_k z_l) / (ab) + B z_{il} z_{kl} / (ab); \\ r_{314} = r_{319} = m B_x z_l z_k / a - B_v z_k z_l / (2b) - B z_{il} z_k / (2b); \quad r_{318} = 2m B_x z_l z_k / a^2 - 12C_l/b^3 - B_v z_{ik} z_l / (ab) - B z_{il} z_{kl} / (ab).$$

$$r_{44} = 3C_i/a + C_l^0/a + B z_i^2 / (4m) + G_l J_l / b; \quad r_{45} = r_{420} = r_{59} = r_{920} = z_l z_i (B_v + B) / 4; \\ r_{48} = r_{89} = -6C_i/a^2 - B_v z_l z_i / (2b) - B z_{il} z_i / (2b); \quad r_{49} = 3C_i/a - C_l^0/a + B z_i^2 / (4m); \quad r_{410} = r_{415} = r_{910} = r_{915} = -z_l z_i (B_v + B) / 4; \\ r_{411} = r_{416} = r_{911} = r_{916} = B z_i / (4m); \quad r_{412} = -r_{417} = r_{912} = -r_{917} = z_l (B_v + B) / 4; \quad r_{413} = r_{913} = -m B_x z_l z_k / a + B_v z_l z_i / (2b) + B z_{kl} z_i / (2b); \\ r_{414} = r_{919} = m B_x z_l z_k / 2 - B z_l z_k / (4m); \quad r_{418} = r_{918} = m B_x z_l z_k / a - B_v z_l z_i / (2b) - B z_{kl} z_i / (2b); \quad r_{419} = m B_x z_l z_k / 2 - B z_l z_k / (4m) - G_l J_l / b.$$

$$r_{55} = 3C_l/b + C_l^0/b + m B z_l^2 / 4 + G_l J_l / a; \quad r_{56} = -r_{511} = r_{620} = -r_{1120} = -z_l (B_v + B) / 4; \\ r_{57} = r_{512} = r_{720} = r_{1220} = m B z_l / 4; \quad r_{58} = r_{820} = B_y z_l z_i / (mb) - B_v z_l z_i / (2a) - B z_l z_i / (2a); \\ r_{510} = B_y z_l z_i / (2m) - m B z_l z_i / 4 - G_l J_l / a; \quad r_{513} = r_{1320} = -B_y z_l z_i / (mb) + B_v z_k z_l / (2a) + B z_{kl} z_l / (2a); \\ r_{514} = r_{519} = r_{1420} = r_{1920} = -z_k z_l (B_v + B) / 4; \quad r_{515} = r_{1020} = B_y z_l z_i / (2m) - m B z_l z_i / 4; \\ r_{518} = r_{1820} = -6C_l/b^2 - B_v z_k z_l / (2a) - B z_{kl} z_l / (2a); \quad r_{520} = 3C_l/b - C_l^0/b + m B z_l^2 / 4.$$

$$r_{68} = -B_v z_l / (2b) + B z_{il} / (2b); \quad r_{610} = r_{615} = -r_{1011} = -r_{1115} = z_l (B - B_v) / 4; \\ r_{613} = -r_{1113} = B_v z_l / (2b) - B z_{kl} / (2b); \quad r_{618} = -r_{1118} = B_v z_l / (2b) + B z_{kl} / (2b).$$

$$r_{77} = -r_{712} = r_{1212} = B_l/b; \quad r_{710} = r_{1215} = -D_l/b - m B z_l / 4; \quad r_{715} = r_{1012} = D_l/b - m B z_l / 4.$$

$$r_{88} = 12C_i/a^3 + 12C_i/b^3 + 2B_v z_i z_j / (ab) + Bz_{ij}^2 / (ab); \quad r_{810} = r_{815} = 6C_j/b^2 + B_v z_i z_j / (2a) + Bz_{ij} z_j / (2a); \quad r_{811} = B_v z_j / (2b) - Bz_{ij} / (2b); \quad r_{812} = -r_{817} = -B_v z_i / (2a) - Bz_{ij} / (2a); \quad r_{813} = 2mB_x z_i z_k / a^2 - 12C_j/b^3 - B_v z_{ik} z_j / (ab) - Bz_{ij} z_{kj} / (ab); \quad r_{814} = r_{819} = -mB_x z_i z_k / a + B_v z_k z_j / (2b) + Bz_{ij} z_k / (2b); \quad r_{818} = -2mB_x z_i z_k / a^2 - 2B_y z_i z_l / (mb^2) + B_v (z_i z_l + z_k z_l) / (ab) + Bz_{ij} z_{kl} / (ab).$$

$$r_{99} = 3C_i/a + C_i^0/a + Bz_i^2/(4m) + G_j J_i/b; \quad r_{914} = mB_x z_i z_k/2 - Bz_i z_k/(4m) - G_j J_i/b.$$

$$r_{1010} = 3C_i/b + C_i^0/b + mBz_i^2/4 + G_j J_i/a; \quad r_{1013} = r_{1315} = -6C_i/b^2 - B_v z_k z_j / (2a) - Bz_{kj} z_j / (2a); \quad r_{1014} = r_{1019} = r_{1415} = r_{1519} = z_k z_j (B_v + B)/4; \quad r_{1015} = 3C_j/b - C_j^0/b + mBz_j^2/4; \quad r_{1018} = r_{1518} = -B_y z_i z_l / (mb) + B_v z_k z_l / (2a) + Bz_{kl} z_l / (2a).$$

$$r_{1111} = -r_{1116} = r_{1616} = B_k/a; \quad r_{1114} = r_{1619} = -D_k/a - Bz_k/(4m); \quad r_{1119} = r_{1416} = D_k/a - Bz_k/(4m); \quad r_{1213} = -r_{1317} = -B_v z_k/(2a) + Bz_{kl}/(2a); \quad r_{1214} = r_{1219} = -r_{1417} = -r_{1719} = z_k (B_v - B)/4; \quad r_{1218} = -r_{1718} = B_v z_k/(2a) - Bz_{kl}/(2a).$$

$$r_{1313} = 12C_k/a^3 + 12C_j/b^3 + 2B_v z_k z_l / (ab) + Bz_{kl}^2 / (ab); \quad r_{1314} = r_{1319} = -6C_k/a^2 - B_v z_k z_l / (2b) - Bz_{kl} z_k / (2b); \quad r_{1318} = -12C_k/a^3 + 2B_y z_i z_l / (mb^2) - B_v z_{il} z_k / (ab) - Bz_{kl} z_{kj} / (ab).$$

$$r_{1414} = 3C_k/a + C_k^0/a + Bz_k^2/(4m) + G_j J_k/b; \quad r_{1418} = r_{1819} = 6C_k/a^2 + B_v z_k z_l / (2b) + Bz_{kl} z_k / (2b); \quad r_{1419} = 3C_k/a - C_k^0/a + Bz_k^2/(4m).$$

$$r_{1515} = 3C_j/b + C_j^0/b + mBz_j^2/4 + G_k J_k/a; \quad r_{1520} = B_y z_i z_l / (2m) - mBz_i z_l/4 - G_k J_k/a.$$

$$r_{1818} = 12C_k/a^3 + 12C_l/b^3 + 2B_v z_k z_l / (ab) + Bz_{kl}^2 / (ab).$$

$$r_{1919} = 3C_k/a + C_k^0/a + Bz_k^2/(4m) + G_l J_l/b.$$

$$r_{2020} = 3C_l/b + C_l^0/b + mBz_l^2/4 + G_k J_k/a.$$

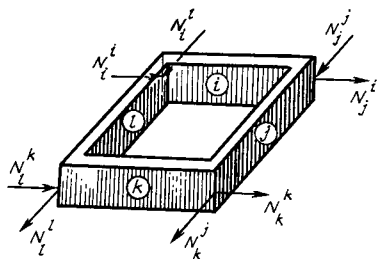
Здесь J — геометрическая характеристика сечения при кручении. Остальные обозначения см. в § 6.3.3.

A 3D perspective diagram of a rectangular frame. The frame has four nodes labeled j , k , and l (with the fourth node implied at the top-left). At node j , there is a vertical force M_j^j and a horizontal force M_j^i . At node k , there is a vertical force M_k^k and a horizontal force M_k^j . At node l , there is a vertical force M_l^l and a horizontal force M_l^i . The frame is shown with perspective, indicating its three-dimensional nature.

[illegible]

335

10. К определению продольных усилий в ребрах, расположенных по контуру прямоугольного элемента плиты



$S_{N_c} = N_{2c} \bar{v}$, где $S_{N_c}^* = [N_i^l N_i^t N_j^l N_j^t N_k^l N_k^t N_l^l N_l^t]$ — вектор продольных усилий;
 $\bar{v}^* = \left[u_i \ v_i \ w_i \ \frac{\partial w_i}{\partial x} \ \frac{\partial w_i}{\partial y} \ u_j \dots \frac{\partial w_k}{\partial y} \ u_l \ v_l \ w_l \ \frac{\partial w_l}{\partial x} \ \frac{\partial w_l}{\partial y} \right]$ — вектор перемещений для отдельного элемента (положительные направления перемещений показаны на рисунке); $N_{2c} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4]$;

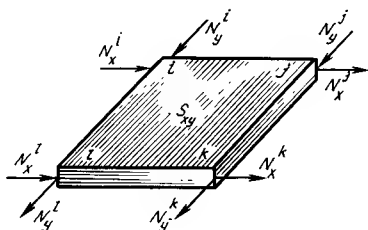
$$P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{B_i}{a} & 0 & \frac{6B_i\gamma_i}{a^2} & -\frac{B_i}{a}(4e_i - 3z_i) & 0 \\ -\frac{B_i}{a} & 0 & -\frac{6B_i\gamma_i}{a^2} & -\frac{B_i}{a}(2e_i - 3z_i) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B_iB_yz_i}{mbB_i^{np}} & 0 & \frac{B_iB_yz_i}{mB_i^{np}} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_iB_yz_i}{mbB_i^{np}} & 0 & -\frac{B_iB_yz_i}{mB_i^{np}} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_kB_xz_i m}{aB_k^{np}} & -\frac{B_kB_xz_i m}{B_k^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B_kB_xz_i m}{aB_k^{np}} & \frac{B_kB_xz_i m}{B_k^{np}} & 0 \\ 0 & -\frac{B_i}{b} & -\frac{6B_i\gamma_i}{b^2} & 0 & -\frac{B_i}{b}(2e_i - 3z_i) \\ 0 & -\frac{B_i}{b} & \frac{6B_i\gamma_i}{b^2} & 0 & -\frac{B_i}{b}(4e_i - 3z_i) \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{B_i}{a} & 0 & -\frac{6B_i\gamma_i}{a^2} & -\frac{B_i}{a}(2e_i - 3z_i) & 0 \\ \frac{B_i}{a} & 0 & \frac{6B_i\gamma_i}{a^2} & -\frac{B_i}{a}(4e_i - 3z_i) & 0 \\ 0 & -\frac{B_j}{b} & \frac{6B_j\gamma_j}{b^2} & 0 & \frac{B_j}{b}(4e_j - 3z_j) \\ 0 & -\frac{B_j}{b} & -\frac{6B_j\gamma_j}{b^2} & 0 & -\frac{B_j}{b}(2e_j - 3z_j) \\ 0 & 0 & \frac{2B_kB_xz_i m}{aB_k^{np}} & -\frac{B_kB_xz_i m}{B_k^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_kB_xz_i m}{aB_k^{np}} & \frac{B_kB_xz_i m}{B_k^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_lB_yz_j}{mbB_l^{np}} & 0 & -\frac{B_lB_yz_j}{mB_l^{np}} \\ 0 & 0 & \frac{2B_lB_yz_j}{mbB_l^{np}} & 0 & \frac{B_lB_yz_j}{mB_l^{np}} \end{bmatrix};$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2B_i B_x z_k m}{a B_i^{np}} & \frac{B_i B_x z_k m}{B_i^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B_i B_x z_k m}{a B_i^{np}} & -\frac{B_i B_x z_k m}{B_i^{np}} & 0 \\ 0 & \frac{B_j}{b} & -\frac{6B_j \gamma_j}{b^2} & 0 & \frac{B_j}{b} (2e_j - 3z_j) \\ 0 & \frac{B_j}{b} & \frac{6B_j \gamma_j}{b^2} & 0 & -\frac{B_j}{b} (4e_j - 3z_j) \\ \frac{B_k}{a} & 0 & \frac{6B_k \gamma_k}{a^2} & -\frac{B_k}{a} (4e_k - 3z_k) & 0 \\ \frac{B_k}{a} & 0 & -\frac{6B_k \gamma_k}{a^2} & \frac{B_k}{a} (2e_k - 3z_k) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B_l B_y z_j}{mb B_l^{np}} & 0 & -\frac{B_l B_y z_j}{m B_l^{np}} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_l B_y z_l}{mb B_l^{np}} & 0 & \frac{B_l B_y z_l}{m B_l^{np}} \end{bmatrix};$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2B_i B_x z_k m}{a B_i^{np}} & \frac{B_i B_x z_k m}{B_i^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_i B_x z_k m}{a B_i^{np}} & -\frac{B_i B_x z_k m}{B_i^{np}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_j B_y z_l}{mb B_j^{np}} & 0 & \frac{B_j B_y z_l}{m B_j^{np}} \\ 0 & 0 & \frac{2B_j B_y z_l}{mb B_j^{np}} & 0 & -\frac{B_j B_y z_l}{m B_j^{np}} \\ -\frac{B_k}{a} & 0 & -\frac{6B_k \gamma_k}{a^2} & -\frac{B_k}{a} (2e_k - 3z_k) & 0 \\ -\frac{B_k}{a} & 0 & \frac{6B_k \gamma_k}{a^2} & \frac{B_k}{a} (4e_k - 3z_k) & 0 \\ 0 & \frac{B_l}{b} & \frac{6B_l \gamma_l}{b^2} & 0 & -\frac{B_l}{b} (4e_l - 3z_l) \\ 0 & \frac{B_l}{b} & -\frac{6B_l \gamma_l}{b^2} & 0 & \frac{B_l}{b} (2e_l - 3z_l) \end{bmatrix}$$

11. К определению продольных и сдвигающих усилий в плите ребристого конечного элемента (см. рис. 6.17)



$S_{N\pi} = N_n \bar{v}$, где $S_{N\pi} = [N_x^i \ N_x^j \ N_x^k \ N_x^l \ N_y^i \ N_y^j \ N_y^k \ N_y^l \ S_{xy}]$ — вектор усилий; $\bar{v}$ — вектор перемещений (см. прил. 10); $N_n = [P_5 \ P_6 \ P_7 \ P_8]$;

$$P_5 = \begin{bmatrix} -\frac{B_x}{a} & -\frac{B_y}{b} & -\frac{6B_x z_l}{a^2} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} & -\frac{3B_x z_l}{a} & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ -\frac{B_x}{a} & 0 & \frac{6B_x z_l}{a^2} & 0 & \frac{3B_x z_l}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_x E_x h z_l m}{a B_k^{np}} & -\frac{B_x E_x h z_l m}{B_k^{np}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_y}{b} & \frac{2B_x E_x h z_l m}{a B_k^{np}} + \frac{6B_y z_l}{b^2} & \frac{B_x E_x h z_l m}{B_k^{np}} & \frac{3B_y z_l}{b} & 0 \\ -\frac{B_y}{a} & -\frac{B_y}{b} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} & -\frac{6B_y z_l}{a^2} & -\frac{3B_y z_l}{a} & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ -\frac{B_y}{a} & 0 & \frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_l^{np}} + \frac{6B_y z_l}{a^2} & \frac{3B_y z_l}{a} & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_l^{np}} & 0 & 0 & -\frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} \\ 0 & -\frac{B_y}{b} & \frac{6B_y z_l}{b^2} & 0 & 0 & \frac{3B_y z_l}{b} \\ -\frac{B}{2b} & -\frac{B}{2a} & \frac{B z_l}{ab} & \frac{B z_l}{2b} & \frac{B z_l}{2a} & \frac{B z_l}{2a} \end{bmatrix};$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} \frac{B_x}{a} & 0 & \frac{6B_x z_l}{a^2} & -\frac{3B_x z_l}{a} & 0 & 0 \\ \frac{B_x}{a} & -\frac{B_y}{b} & -\frac{6B_x z_l}{a^2} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} & \frac{3B_x z_l}{a} & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ 0 & -\frac{B_y}{b} & \frac{2B_x E_x h z_l m}{a B_k^{np}} + \frac{6B_y z_l}{b^2} & -\frac{B_x E_x h z_l m}{B_k^{np}} & \frac{3B_y z_l}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_x E_x h z_l m}{a B_k^{np}} & \frac{B_x E_x h z_l m}{B_k^{np}} & 0 & 0 \\ \frac{B_y}{a} & 0 & \frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_l^{np}} + \frac{6B_y z_l}{a^2} & -\frac{3B_y z_l}{a} & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} \\ \frac{B_y}{a} & -\frac{B_y}{b} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} & \frac{3B_y z_l}{a} & -\frac{3B_y z_l}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{B_y}{b} & \frac{6B_y z_l}{b^2} & 0 & 0 & \frac{3B_y z_l}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_l^{np}} & 0 & 0 & -\frac{B_y E_y h z_l}{m B_l^{np}} \\ -\frac{B}{2b} & \frac{B}{2a} & -\frac{B z_l}{ab} & \frac{B z_l}{2b} & -\frac{B z_l}{2a} & \frac{B z_l}{2a} \end{bmatrix};$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2B_x E_x h z_k m}{a B_i^{\text{np}}} & \frac{B_x E_x h z_k m}{B_i^{\text{np}}} & 0 \\ 0 & \frac{B_y}{b} & \frac{2B_x E_x h z_k m}{a B_i^{\text{np}}} + \frac{6B_y z_l}{b^2} & -\frac{B_x E_x h z_k m}{B_i^{\text{np}}} & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ \frac{B_x}{a} & \frac{B_y}{b} & -\frac{6B_x z_k}{a^2} - \frac{6B_y z_l}{b^2} & \frac{3B_x z_k}{a} & \frac{3B_y z_l}{b} \\ \frac{B_x}{a} & 0 & \frac{6B_x z_k}{a^2} & -\frac{3B_x z_k}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_i^{\text{np}}} & 0 & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_i^{\text{np}}} \\ 0 & \frac{B_y}{b} & \frac{6B_y z_l}{b^2} & 0 & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ \frac{B_y}{a} & \frac{B_y}{b} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} - \frac{6B_y z_k}{a^2} & \frac{3B_y z_k}{a} & \frac{3B_y z_l}{b} \\ \frac{B_y}{a} & 0 & \frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_i^{\text{np}}} + \frac{6B_y z_k}{a^2} & -\frac{3B_y z_k}{a} & -\frac{B_y E_y h z_l}{m B_i^{\text{np}}} \\ \frac{B}{2b} & \frac{B}{2a} & \frac{B z_{kl}}{ab} & -\frac{B z_k}{2b} & -\frac{B z_l}{2a} \end{bmatrix};$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_y}{b} & \frac{2B_x E_x h z_k m}{a B_i^{\text{np}}} + \frac{6B_y z_l}{b^2} & \frac{B_x E_x h z_k m}{B_i^{\text{np}}} & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_x E_x h z_k m}{a B_i^{\text{np}}} & -\frac{B_x E_x h z_k m}{B_i^{\text{np}}} & 0 \\ -\frac{B_x}{a} & 0 & \frac{6B_x z_k}{a^2} & \frac{3B_x z_k}{a} & 0 \\ -\frac{B_x}{a} & \frac{B_y}{b} & -\frac{6B_x z_k}{a^2} - \frac{6B_y z_l}{b^2} & -\frac{3B_x z_k}{a} & \frac{3B_y z_l}{b} \\ 0 & \frac{B_y}{b} & \frac{6B_y z_l}{b^2} & 0 & -\frac{3B_y z_l}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_i^{\text{np}}} & 0 & \frac{B_y E_y h z_l}{m B_i^{\text{np}}} \\ -\frac{B_y}{a} & 0 & \frac{2B_y E_y h z_l}{m b B_i^{\text{np}}} + \frac{6B_y z_k}{a^2} & \frac{3B_y z_k}{a} & -\frac{B_y E_y h z_l}{m B_i^{\text{np}}} \\ -\frac{B_y}{a} & \frac{B_y}{b} & -\frac{6B_y z_l}{b^2} - \frac{6B_y z_k}{a^2} & -\frac{3B_y z_k}{a} & \frac{3B_y z_l}{b} \\ \frac{B}{2b} & -\frac{B}{2a} & -\frac{B z_{kl}}{ab} & -\frac{B z_k}{2b} & \frac{B z_l}{2a} \end{bmatrix}$$

12. Элементы симметричной матрицы эквивалентных масс конечного элемента в форме прямоугольного треугольника (см. рис. к прил. 4)

$$m_{11}=864; m_{12}=84a; m_{13}=84b; m_{14}=252+144c^2; m_{15}=-a(66+24c^2); m_{16}= \\ =b(42+24c^2); m_{17}=72ac-168bs; m_{18}=252+144s^2; m_{19}=a(42+24s^2); m_{110}= \\ =-b(66+24s^2).$$

$$m_{22}=12a^2; m_{23}=6ab; m_{24}=a(48+18c^2); m_{25}=-a^2(12+3c^2); m_{26}=ab(b+3c^2); \\ m_{27}=a(12ac-24bs); m_{28}=18a(1+s^2); m_{29}=a^2(5+3s^2); m_{210}=-ab(5+3s^2).$$

$$m_{33}=12b^2; m_{34}=18b(1+c^2); m_{35}=-ab(5+3c^2); m_{39}=ab(6+3s^2); m_{310}= \\ =-b^2(12+3s^2); m_{36}=b^2(5+3c^2); m_{37}=b(8ac-20bs); m_{38}=b(48+18s^2).$$

$$m_{44}=864+288c^2+72c^4; m_{45}=-a(168+60c^2+12c^4); m_{46}=b(108+54c^2+12c^4); \\ m_{47}=ac(336+72c^2)-bs(432+120c^2); m_{48}=396+72s^2c^2; m_{49}=a(96+18c^2-12c^4); \\ m_{410}=-b(90+24c^2-12c^4).$$

$$m_{55}=a^2(36+12c^2+2c^4); m_{56}=-ab(24+11c^2+2c^4); m_{57}=abs(96+20c^2)- \\ -a^2c(72+12c^2); m_{58}=-a(90+24s^2-12s^4); m_{59}=-a^2(24+c^2-2c^4); m_{510}= \\ =ab(23+2s^2c^2).$$

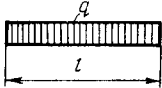
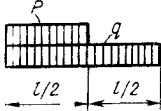
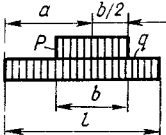
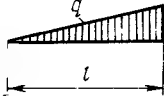
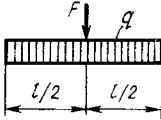
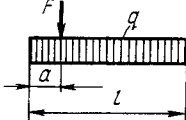
$$m_{66}=b^2(20s^4+50s^2c^2+32c^4); m_{67}=abc(60+12c^2)-b^2s(80+20c^2); m_{68}=b(96+ \\ +18s^2-12s^4); m_{69}=ab(22s^4+46s^2c^2+22c^4); m_{610}=-b^2(24+s^2-2s^4).$$

$$m_{77}=320b^2s^2-480absc+192a^2c^2; m_{78}=ac(192+72s^2)-bs(288+120s^2); m_{79}= \\ =a^2c(48+12s^2)-abs(68+20s^2); m_{710}=b^2s(72+20s^2)-abc(48+12s^2).$$

$$m_{88}=864+288s^2+72s^4; m_{89}=a(108+54s^2+12s^4); m_{810}=-b(168+60s^2+ \\ +12s^4).$$

$$m_{99}=a^2(32s^4+50s^2c^2+20c^4); m_{910}=-ab(24+11s^2+2s^4); m_{1010}=b^2(36+ \\ +12s^2+2s^4).$$

13. Характеристика нагрузки D

Номер схемы	Схема нагрузки	Значение D при $\alpha = a/l$, $\beta = b/l$
1		$q^2 l^2 / 12$
2		$q^2 l^3 / 12 + q P l^3 / 12 + 5 P^2 l^3 / 192$
3		$(q^2 + (12\alpha - 12\alpha^2 - 2\beta)\beta^2 p^2 + (12\alpha - 12\alpha^2 - \beta^2)\beta p q) l^3 / 12$
4		$q^2 l^3 / 45$
5		$q^2 l^3 / 12 + F^2 l / 4 + q F l^2 / 4$
6		$q^2 l^3 / 12 + q F l^2 \alpha (1 - \alpha) + F^2 \alpha (1 - \alpha) l$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амиро И. Я., Заруцкий В. А.** Методы расчета оболочек: В 2 т. Т. 2: Теория ребристых оболочек. Киев, 1980. 368 с.
2. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 496 с.
3. **Березии И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений: В 2 т. Т. 1. М., 1962. 464 с.
4. **Березии И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений: В 2 т. Т. 2. М., 1962. 620 с.
5. **Бидерман В. Л.** Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики//Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 2. С. 62—66.
6. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974. 504 с.
7. **Болотин В. В.** Динамическая устойчивость упругих систем. М., 1956. 600 с.
8. **Бондаренко С. В.** Теория сопротивления строительных конструкций режимным нагрузкам. М., 1984. 392 с.
9. **Бреббия К., Уокер С.** Применение метода граничных элементов в технике. М., 1982. 248 с.
10. **Бреббия К., Геллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов. М., 1987. 525 с.
11. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. М., 1986. 544 с.
12. **Вагер Б. Г.** Применение метода матричной факторизации к решению системы дифференциальных уравнений четвертого порядка//Тр. ГГО. Л., 1977. Вып. 382. С. 88—98.
13. **Вайнберг М. М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972. 416 с.
14. **Валишвили Н. В.** Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М., 1976. 278 с.
15. **Ван Цзи-де.** Прикладная теория упругости. М., 1959. 400 с.
16. **Власов В. З.** Тонкостенные пространственные системы. М., 1958. 502 с.
17. **Волков Е. А.** Численные методы. М., 1987. 248 с.
18. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972. 432 с.
19. **Вольмир А. С.** Гибкие пластины и оболочки. М., 1956. 256 с.
20. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М., 1963. 880 с.
21. **Гельфанд И. М., Локуцкий О. В.** Метод прогонки для разностных уравнений. М., 1962. 340 с.
22. **Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.** Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М., 1988. 232 с.

23. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев, 1964. 287 с.
24. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., 1972. 311 с.
25. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалов Э. З. Численные методы анализа. М., 1963. 400 с.
26. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., 1963. 660 с.
27. Длугач М. И. Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости. Киев, 1964. 260 с.
28. Длугач М. И., Ковальчук Н. В. Метод конечных элементов в применении к расчету цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями//Прикладная механика. 1973. Т. 9, № 11. С. 35—41.
29. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., 1975. 541 с.
30. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справ. пособие. Киев, 1986. 584 с.
31. Игнатьев В. А., Горелов С. Ф. Расчет коробчатых систем по методу суперэлементов со сплайн-интерполяцией перемещений//Изв. вузов. Стр-во и архитектура. 1986. № 11. С. 30—34.
32. Ильин В. П., Карпов В. В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л., 1986. 168 с.
33. Ильин В. П., Карпов В. В. Связанность форм потери устойчивости ребристых оболочек//Тр. 14 Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 1987. С. 615—619.
34. Ильин В. П., Мальцев Л. Е., Соколов В. Г. Расчет строительных конструкций из вязкоупругих материалов. Л., 1990. 218 с.
35. Интегральные уравнения/П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский и др. М., 1968. 448'с.
36. Калиткин Н. П. Численные методы. М., 1978. 512 с.
37. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1965. 703 с.
38. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962. 708 с.
39. Карпов В. В., Петров В. В. Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек//Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 189—191.
40. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., 1961. 778 с.
41. Качурин В. К. Теория висячих систем. М., 1962. 224 с.
42. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., 1968. 503 с.
43. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М., 1976. 279 с.
44. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968. 720 с.
45. Краскевич Б. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев, 1986. 263 с.
46. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М., 1975. 304 с.
47. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М., 1987. 328 с.
48. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов, 1976. 216 с.
49. Кэнтин Г. Смещение криволинейных конечных элементов как жесткого целого//Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8, № 7. С. 84—88.

50. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики. М., 1968. 620 с.
51. **Масленников А. М.** Расчет строительных конструкций численными методами. Л., 1987. 225 с.
52. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М., 1968. 576 с.
53. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 512 с.
54. **Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.** Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1956. 383 с.
55. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л., 1962. 431 с.
56. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М., 1948. 333 с.
57. **Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.** Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М., 1973. 659 с.
58. **Огибалов П. М., Колтунов М. А.** Оболочки и пластины. М., 1969. 695 с.
59. **Петров В. В.** Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов, 1975. 120 с.
60. **Петров В. В., Овчинников И. Г., Ярославский В. И.** Расчет пластинок и оболочек из нелинейно-упругого материала. Саратов, 1976. 133 с.
61. **Петровский И. Г.** Лекции по теории интегральных уравнений. М., 1965. 128 с.
62. **Постиов В. А., Хархурим И. Я.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., 1974. 342 с.
63. **Прочность, устойчивость, колебания:** Справ.: В 3 т. Т. 1/Под общ. ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М., 1968. 831 с.
64. **Приближенное решение** оперативных уравнений/М. А. Красносельский, Г. М. Вайнникко, П. П. Забрейко и др. М., 1969. 456 с.
65. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М., 1988. 712 с.
66. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977. 384 с.
67. **Райнус Г. Э.** Расчет многопролетных тросов и многопролетных ферм из тросов. Л., 1968. 136 с.
68. **Ржаницын А. Р.** Строительная механика. М., 1982. 400 с.
69. **Ржаницын А. Р.** Теория ползучести. М., 1968. 416 с.
70. **Розии Л. А.** Основы метода конечных элементов в теории упругости. Л., 1972. 79 с.
71. **Сергеев Н. Д., Богатырев Л. И.** Проблемы оптимального проектирования конструкций. Л., 1971. 136 с.
72. **Смирнов А. Ф.** Устойчивость и колебания сооружений. М., 1958. 572 с.
73. **Смирнов М. М.** Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М., 1964. 205 с.
74. **Современные методы** расчета сложных статически неопределимых систем/Под общ. ред. А. П. Филина. Л., 1961. 876 с.
75. **Справочник** проектировщика/Под ред. А. А. Уманского. М., 1960. 1040 с.
76. **Справочник** по строительной механике корабля: В 3 т. Т. 2/Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л., 1982. 464 с.
77. **Строительная механика/А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашенников, Н. Н. Шапошников.** М., 1981. 512 с.
78. **Строительная механика** летательных аппаратов/И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Гасильев и др.; Под ред. И. Ф. Образова. М., 1986. 536 с.
79. **Теребушко О. И.** Основы теории упругости и пластичности. М., 1984. 320 с.
80. **Тимошенко С. П., Гудьер Д.** Теория упругости. М., 1975. 576 с.
81. **Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.** Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань, 1986. 296 с.

82. **Филии А. П.** Приближенные методы математического анализа, используемые в механике деформируемого тела. Л., 1971. 160 с.
83. **Цлаф Л. Я.** Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., 1966. 176 с.
84. **Шиманский В. Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ: В 2 ч. Киев, 1963—1966. Ч. 1. 1963. 194 с. Ч. 2. 1966. 244 с.
85. **Шипилов А. Г.** Отклон башен-градир на динамические воздействия // Строит. механика сооружений. Л., 1981. С. 136—146.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ *

А

Арка бесшарнирная 239—240

Б

Балка на упругом основании 91—92
— переменного сечения 200—202

В

Вариация функции 182
— функционала 182, 183
Вектор оптимальный 321
— перемещений узлов конечного эле-
мента 325, 335
Векторы собственные матрицы 41, 42

Г

Градиент функции 53, 54, 55 -56

Д

Дельта-функция 97, 98
Дефект сплайна 15, 17
Дифференцирование приближенное 19

З

Задача динамики пологих оболочек
284—286
— Дирихле 100—101, 102—108, 112,
127, 249—251
— Кельвина 258—259
— Коши 75—76
— Неймана 249—251
— о внедрении конуса в жидкость
251—255
— строительной механики краевая мно-
гомерная 100—102, 115—116, 121—
122, 126—127

- - - — одномерная 81—84
— на собственные значения
43—46, 87—88, 92—93, 216—218
- - - — начальная 75—80
— — — нелинейная 209—215, 271—
307
Значение собственное матрицы 41—
42, 70
— — — наибольшее 43
— — — наименьшее 46

И

Изгиб тонкой гибкой пластинки 212—
215
— — плиты 105—106, 122—123, 195—
196
— — — решение Леви 116—117
— — — решение Навье 117, 121
— — — полосы 291—292

К

Колебания свободные балки 111—112
— — гибкой нити 223—224, 302—303
— — маятника 78—79
— — мембраны 303—307
— — стержня поперечные 218—221
— — — продольные 80
— — струны 108—111, 234—235
Кручение призматического стержня
103—105, 124—125, 195—196, 203—
204, 207—208

Л

Ломаная Эйлера 75

М

Матрица деформаций конечного эле-
мента 136—137

* Составил В. П. Ильин.

Матрица единичная 30
 — жесткости в методе перемещений 66—67, 132
 — — конечного элемента 135—137, 140—141
 — — — плиты 151—153, 327—329, 331
 — — — — прямоугольного 147—148
 — — — — стержня 143
 — — — — треугольного 147
 — — суперэлемента 176
 — коэффициентов системы линейных уравнений 31—33, 34—35, 89
 — невырожденная 42
 — обратная 30
 — податливости в методе сил 58, 60—61
 — симметричная 46
 — узловых нагрузок суперэлемента 176
 — усилий в конечном элементе 141, 142, 325
 — — — — прямоугольном 148
 — — — — треугольном 148
 — характеристическая 41
 — эквивалентных масс конечного элемента 340
 — Якоби 51
 Матрицы подобные 42
 Мембрана 184—185, 303—307
 Метод Бубнова — Галеркина 124, 230, 282—283
 — вариационно-разностный 196
 — вариационный 181
 — вариационных итераций 207
 — Власова — Канторовича 127—128, 202—208
 — Галеркина 85—87
 — Гаусса 25—29
 — граничных элементов 255—257
 — дополнительных функций 83—85
 — итераций 229—230
 — коллокаций 121—123
 — конечных разностей в задачах одномерных 88—93
 — — — — многомерных 100—108
 — — — — на собственные значения 92—93
 — — элементов 130—180, 197—202
 — малого параметра 209—221, 290—292
 — минимизации невязки 121—126
 — множителей Лагранжа 316—319
 — наилучших произведений 125—126
 — наименьших квадратов 20—21
 — — — — интегральный 123
 — наискорейшего спуска 53—56
 — начальных параметров 81—83
 — Ньютона — Канторовича 271—272
 — — — — модифицированный 272—273
 — Ньютона модифицированный 51—52
 — Ньютона — Рафсона 48—49
 — операционный решения уравнений

дифференциальных 233—235
 — — — — интегральных 235—237
 — — переменных направлений 106—108
 — — перемещений 65—69
 — — покоординатного спуска 56
 — — последовательного наращивания ребер 279—282
 — — последовательных нагружений 273—278, 294—296
 — — приближений 79—80, 229—230
 — — потенциалов 245—255
 — — прогонки 31—34
 — — продолжения по параметру 273—282
 — — простой итерации 47—48, 49—50
 — — прямых 126—127
 — — Рунге 194—196
 — — Рунге — Кутты для начальных задач 76—77
 — — — — для неявной схемы 94—96
 — — — — для систем уравнений 77—79
 — — сил 57—65
 — — суперэлементов 130, 175—180
 — — упругих решений 292—294
 — — Фурье разделения переменных 108—121
 — Эйлера для начальных задач 75—76
 Минимум функционала 183, 196
 Многочлен обобщенный 11

Н

Нагрузка критическая на стержень 93, 217
 Напряжение в упругом полупространстве 268—269
 Напряженное состояние объемное 292—294
 — — плоское 288—292
 Невязка приближенного решения 121
 Неустойчивость стержня динамическая 219—221
 Нить гибкая многопролетная 300—301
 — — поперечные колебания 302—303
 — — статический расчет 296—299
 — — уточненный расчет 299—300

О

Оболочка 159—161
 — — пологая 276—278, 282, 284—286
 Обусловленность матрицы 35
 — — — — способы улучшения 38—41
 Оператор интегральный 222

П

Пластина гибкая 212—215
 — — тонкая 151—153, 157—159

Уравнение гиперболического типа 108
 — дифференциальное Эйлера 183—184
 — интегральное Вольтерра 225
 — — Фредгольма 222—223
 — Лапласа 112, 245—246
 — Матье 219
 — Остроградского 183, 206—207
 — Пуассона 102, 106, 124—125, 127, 128—129
 — разностное 107
 — совместности деформаций 57—58
 — типа свертки 236
 — характеристическое матрицы 41
 — эллиптического типа 102—103, 112
 Уравнения нелинейные 47—56
 — движения оболочки 191—193
 — канонические метода перемещений 66—67
 — — — сил 57—58
 — равновесия пологой оболочки 188—191
 — — упругого тела 186—188
 Условие сходимости ряда 211
 Устойчивость сжатого стержня динамическая 218—221
 — — — статическая 93, 217—218
 — стержневой системы 167—172

Ф

Форма свободных колебаний системы 70—72
 Формула Грина 188, 305
 — Меллина 232
 — прямоугольников 197
 — Симпсона 19—20, 58—59
 Формулы аппроксимации производных 91—92

Функции координатные (базисные) 86
 — обобщенные Хевисайда 96, 239, 280
 Функционал 181
 Функция аппроксимирующая 11—12, 121, 195

— Грина 224
 — корректирующая 122
 — Лагранжа 317—319
 — напряжений 124—125, 213, 291
 — перемещений конечного элемента 137—139
 — сглаживающая 20—21
 — фундаментальная 12
 — цели 308

Ч

Частота свободных колебаний плиты 172—174
 — — — системы 69—72, 163—164
 — — — суперэлемента 179—180

Э

Экстремум глобальный 308
 — функционала 182, 186
 Элемент граничный 269
 — конечный 131
 — — в форме прямоугольного треугольника 330
 — — плиты прямоугольной 325, 333—334
 — — — скошенной 332
 — — ребристый 338—339
 Энергия деформации потенциальная 185
 — — — удельная 188
 — системы полная 186

Я

Ядро интегрального уравнения 223
 — — — итерированное 228
 — — — разрешающее (резольвента) 228
 — ползучести 237

Справочное издание

Ильин Владимир Петрович
Карпов Владимир Васильевич
Масленников Александр Матвеевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Справочное пособие

Младший редактор *А. П. Берлина*
Художественный редактор *В. Н. Валентович*
Технический редактор *И. П. Тихонова*
Корректор *Т. К. Хваль*

Сдано в набор 05.09.89. Подписано в печать 30.08.90.
Формат 60×90/16. Бумага кн.-журн. Гарнитура
литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 22.
Усл. кр.-отт. 22. Уч.-изд. л. 23,81. Тираж 2800 экз.
Зак. 1810. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государствен-
ного комитета БССР по печати. 220048, Минск,
проспект Машерова, 11.

Типография им. Франциска Скорины издательства
«Навука і тэхніка». 220600, Минск, ул. Жодин-
ская, 18.